

LYON

Exercice n° 1

Enoncé

Les promeneurs

Deux amis randonneurs, Antoine et Bernard, sont partis à la même heure, l'un de A, l'autre de B et se dirigent vers C. Chacun marche à sa propre allure, constante, et leurs allures respectives sont telles qu'ils arriveraient en même temps en C. En cours de route ils s'aperçoivent et se dirigent alors l'un vers l'autre à travers champs sans changer leurs allures respectives et se rejoignent en R (voir plan).

1. Quelle est la nature du quadrilatère AMNB ?

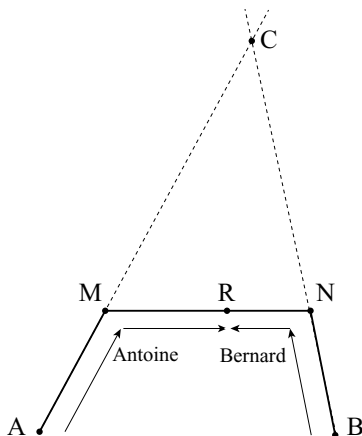
2. Antoine : « J'ai marché autant de temps sur le chemin que dans le champ. »

Bernard : « Moi aussi. »

Si la réponse de Bernard est évidente, la nature du point R l'est beaucoup moins.

Quelle est la nature de R pour le triangle ABC ?

3. Sur le plan, on lit $AB = 9\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$ et $BC = 13\text{cm}$. Représenter cette carte et matérialiser le parcours d'Antoine et de Bernard en construisant le triangle ABC et les points M, N et R.



Solution

1. v_A et v_B sont les vitesses respectives d'Antoine et de Bernard. T est le temps nécessaire pour arriver en C, t le temps nécessaire pour arriver en M ou N.

$$AC = v_A T \quad \text{et} \quad BC = v_B T$$

$$AM = v_A t \quad \text{et} \quad BN = v_B t$$

d'où $MC = v_A(T - t)$ et $NC = v_b(T - t)$ et par conséquent

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB}.$$

La réciproque du théorème de Thalès donne alors (MN) parallèle à (AB) et le quadrilatère $AMNB$ est un trapèze.

2. Les promeneurs conservant toujours la même allure, de leurs affirmations il résulte :

$$AM = MR \quad \text{et} \quad BN = RN \quad \text{donc} \quad \widehat{MAR} = \widehat{MRA} \quad \text{et} \quad \widehat{NBR} = \widehat{NRB}.$$

Comme d'autre part $\widehat{RAB} = \widehat{MRA}$ (angles alternes internes), dans le triangle ABC , (AR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et (BR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$.

R est donc le centre du cercle inscrit du triangle ABC .

3. Après avoir construit le triangle ABC , R s'obtient comme intersection des bissectrices et M et N en construisant la parallèle à (BC) passant par R .

Exercice n° 2

Enoncé

Nombres et tableur (à rapprocher de...)

Les premiers entiers naturels non nuls ont été rangés dans une feuille de tableur comme indiqué sur l'image ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	6	10	15	21	28
2	2	5	9	14	20	27	35
3	4	8	13	19	26	34	43
4	7	12	18	25	33	42	52
5	11	17	24	32	41	51	62
6	16	23	31	40	50	61	73
7	22	30	39	49	60	72	85

Le naturel qui se trouve dans la cellule du tableur à l'intersection de la colonne i et de la ligne j sera noté $C(i, j)$; ainsi, sur le dessin ci-dessus, on a $C(3, 4) = 18$.

- Donner $C(1, 9)$, $C(1, 10)$, $C(1, 13)$. Quelle relation peut-on conjecturer entre $C(1, j+1)$ et $C(1, j)$?
 - Donner $C(9, 1)$, $C(10, 1)$, $C(13, 1)$. Quelle relation peut-on conjecturer entre $C(i+1, 1)$ et $C(i, 1)$?
- On veut obtenir une feuille de tableur remplie comme ci-dessus (mais en allant aussi loin que le permet le tableur). Comment, à l'aide de formules « recopiées vers le bas » ou « recopiées vers la droite » (ou les deux) peut-on obtenir cela ?

3. a) Justifier les relations de la question 1 entre $C(1, j+1)$ et $C(1, j)$, d'une part, et $C(i+1, 1)$ et $C(i, 1)$, d'autre part.
- b) Donner une expression de $C(1, j)$ en fonction de j puis une expression de $C(i, j)$ en fonction de i et j .
- On pourra utiliser le résultat suivant : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
4. Déterminer i et j sachant que $C(i, j) = 2008$.

Solution

1. $C(1, 9) = 37$, $C(1, 10) = 46$ et $C(1, 13) = 79$;

$C(9, 1) = 45$, $C(10, 1) = 55$ et $C(13, 1) = 91$.

On peut conjecturer que $C(1, j+1) = C(1, j) + j$ et $C(i+1, 1) = C(i, 1) + (i+1)$.

2. En s'appuyant sur les conjectures, en remarquant que $j = C(1, j+1) - C(1, j)$, on remplit les 4 premières cellules $C(1, 1) = 1$, $C(1, 2) = 2$, $C(2, 2) = 5$ et $C(2, 1) = 3$ ce qui, sur un tableur, donnerait :

Cellule A1 : 1 Cellule A2 : 2 Cellule B2 : 5 Cellule B1 : 3.

Dans la cellule A3, on peut entrer la formule :=A2 + A2 - A1 + 1 et on recopie cette formule vers le bas dans la colonne A, on recopie alors cette colonne vers la droite.

Il reste les deux premières lignes à compléter ; dans la cellule C1, il suffit alors d'entrer la formule :=B1 + B1 - A1 + 1 et de recopier cette formule vers la droite, puis de recopier la ligne d'une ligne vers le bas.

(En utilisant la fonction « ligne() », on pouvait créer d'autres formules).

3.

a) $C(1, j+1)$ est égal à $C(1, j)$ auquel on ajoute le nombre j d'éléments de la $(j)^{\text{ième}}$ diagonale.

$C(i+1, 1)$ est égal à $C(i, 1)$ auquel on ajoute le nombre $i+1$ d'éléments de la $(i+1)^{\text{ième}}$ diagonale.

b) $C(1, j) = C(1, 1) + 1 + 2 + 3 + \dots + (j-1) = 1 + \frac{(j-1)j}{2} = \frac{j^2 - j + 2}{2}$
 $C(i, j), C(i-1, j+1), C(i-2, j+2), \dots$ et $C(1, j+i-1)$ sont sur la même diagonale et

$$C(i, j) = C(1, j+i-1) + (i-1).$$

On en déduit que

$$C(i, j) = \frac{i^2 + j^2 + 2ij - i - 3j + 2}{2}.$$

4. $C(i, j)$ est compris entre $C(1, j+i-1)$ et $C(1, j+i)$; or $C(1, 63) = 1954$ et $C(1, 64) = 2017$ donc $j+i-1 = 63$ et $i-1 = 2008 - 1954 = 54$ et donc $C(55, 9) = 2008$.

Solution (A. Guillemot)

Le module « Tableur » de la TI-Nspire va nous permettre de faire des essais, valider nos conjectures et nous aider à résoudre la dernière question.

	A	B	C	D	E	F	G
8	34	38	48	50	71	81	
9	37	47	58	70	85	97	
10	46	57	69	87	96	111	
11	56	69	81	95	110	126	
12	67	80	94	109	125	142	
13	79	93	108	124	141	159	
a1?	=2*a2-a1+1						

	I	J	K	L	M	N
1	35	45	55	65	76	91
2	44	54	64	77	90	104
3	52	64	76	88	102	118
4	63	75	88	102	117	133
5	74	87	101	116	132	149
6	86	100	114	131	148	166
b1						

1a) $C(1, 9) = 37$, $C(1, 10) = 46$ et $C(1, 13) = 79$

1b) I est la neuvième colonne, J la dixième et M la treizième donc $C(9, 1) = 45$, $C(10, 1) = 55$ et $C(13, 1) = 91$

On peut conjecturer que $C(1, j+1) = C(1, j) + j$ et que $C(i+1, 1) = C(i, 1) + (i+1)$

2) D'après notre conjecture : $C(1, j+1) = C(1, j) + j$ donc $C(1, j) = C(1, j-1) + (j-1)$.

On en déduit que $j = C(1, j) - C(1, j-1) + 1$ ce qui donne $C(1, j+1) = 2C(1, j) - C(1, j-1) + 1$.

Il suffit donc de remplir les cellules $a1$ et $a2$, de rentrer la formule : $= 2a2 - a1 + 1$ dans $a3$ et de recopier cette formule vers le bas.

En remplissant $b1$ et $b2$ par 3 et 5, on peut de la même manière remplir la deuxième colonne.

D'après notre conjecture : $C(i+1, 1) = C(i, 1) + (i+1)$ donc $C(i, 1) = C(i-1, 1) + I$

On en déduit que $i = C(i, 1) - C(i-1, 1)$ ce qui donne $C(i+1, 1) = 2C(i, 1) - C(i-1, 1) + 1$

Dans $c1$ on rentre la formule : $= 2b1 - a1 + 1$ et on recopie vers la droite. On recopie ensuite le tout vers le bas et la calculatrice nous permet de voir que ces formules remplissent bien la feuille de tableur comme voulu.

3a) $C(1, j) = C(1, j-1) + j-1$

$$C(1, j-1) = C(1, j-2) + j-2$$

$$C(1, j-2) = C(1, j-3) + j-3$$

$$\dots \dots$$

$$C(1, 2) = C(1, 1) + 1$$

En additionnant toutes ces égalités, on obtient

$$C(1, j) = C(1, 1) + 1 + 2 + 3 + \dots + (j-1) = 1 + \frac{j(j-1)}{2} = \frac{j^2 - j + 2}{2}$$

3b) La cellule $C(i, j)$ est sur la même diagonale que la cellule $C(1, i+j-1)$. Pour passer de $C(1, i+j-1)$ à $C(i, j)$ on ajoute $i-1$. Donc $C(i, j) =$

$$C(1, i + j - 1) + i - 1 = \frac{i^2 + 2ij + j^2 - i - 3j + 2}{2}$$

4) Remplissons la première colonne du tableau avec la formule précisée à la deuxième question jusqu'à dépasser 2008 et supposons que le tableau dispose d'au moins 63 colonnes.

	A	B	C	D	E	F
58	1712					
60	1771					
61	1831					
62	1892					
63	1954					
64	2017					
A64		2·a63 - a62 + 1				

Le nombre 2008 se retrouve sur la diagonale 63 qui commence par 1954. Comme $2008 - 1954 = 54$, 2008 est donc dans la colonne 55.

$1 + 63 = 64 = 55 + 9$ donc 2008 est dans la ligne 9.

$$C(55, 9) = 2008$$

La calculatrice nous a permis de conjecturer que $C(55, 9) = 2008$.

Vérifions que ce résultat est le bon avec la formule trouvée à la question 3c.

$$C(55, 9) = \frac{i^2 + 2 \times 55 \times 9 + 9^2 - 55 - 3 \times 9 + 2}{2} = 2008$$

4b) Cas du tableau TI-Nspire.

Le tableau TI-Nspire ne dispose que de 26 colonnes, donc jusqu'à la vingt-sixième colonne il se remplit comme l'exemple précédent, ensuite on passe d'une cellule à celle située dessous en ajoutant 26. On complète la première colonne du tableau en tenant compte de ces remarques.

	A	B	C	D	E	F
86	1885					
87	1912					
88	1938					
89	1964					
90	1990					
91	2015					
A91		-a90 26				

Le nombre 2008 se retrouve sur la diagonale 90 qui commence par 1990. Comme $2008 - 1990 = 18$, 2008 est donc dans la colonne 19.

$1 + 90 = 91 = 72 + 19$ donc 2008 est dans la ligne 72.

$C(19, 72) = 2008$ dans le tableau TI-Nspire.