

LIMOGES

Exercice n° 1 (Toutes séries)

Enoncé

La guerre des boutons

Une console est constituée de 2008 boutons-poussoirs blancs, numérotés de 1 à 2008. Chacun n'a que deux états : **enfoncé** ou **relevé**.

Au départ, tous les boutons sont **relevés**.



Un opérateur (très patient) est chargé de modifier l'état des boutons en respectant le protocole suivant, dans l'ordre :

Règle n°1 : Il peint en rouge le bouton numéroté 1.

Règle n°2 : Il cherche le premier bouton blanc relevé, dans l'ordre des numéros, le laisse relevé et le peint en rouge.

Règle n°3 : Il modifie l'état de tous les autres boutons portant un numéro multiple de celui-ci.

Règle n°4 : Quand il arrive au bout de la console, il recommence à partir de la règle 2, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'aucune action ne soit possible en respectant le protocole.

1. Décrire l'état (relevé ou enfoncé) des boutons 1 à 10 à la fin des opérations. Détailler la démarche.
2. Quel sera l'état du bouton 2008 à la fin des opérations ? Détailler la démarche.

Solution (P.L.H.)

1. Notons par une lettre minuscule e ou r l'état d'un poussoir et par une majuscule B ou R sa couleur, chaque bouton a donc quatre possibilités : Be , Br , Re , Rr .

Pour les dix premiers boutons, on obtient successivement

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
partant de	Br	Br	Br	Br	Br	Br	Br	Br	Br	Br
	Rr	Rr	Br	Be	Br	Be	Br	Be	Br	Be
	Rr	Rr	Rr	Be	Br	Br	Br	Be	Be	Be
	Rr	Rr	Rr	Be	Rr	Br	Br	Be	Be	Br
	Rr	Rr	Rr	Be	Rr	Rr	Br	Be	Be	Br
	Rr	Rr	Rr	Be	Rr	Rr	Rr	Be	Be	Br
	Rr	Rr	Rr	Be	Rr	Rr	Rr	Be	Be	Rr

Les transformations suivantes ne concerneront plus les dix premiers boutons qui seront soit rouges relievés soit dans l'état blancs enfoncés.

2. A la fin des opérations seuls subsistent les états Rr et Be .

On a $2008 = 2^3 \times 251$ avec 251 premier. Un bouton portant un numéro premier reste dans l'état Br jusqu'à ce qu'il passe dans l'état Rr et y reste.

Le bouton 2008 prend successivement l'état Br puis l'état Be dès que le bouton n° 2 est peint en rouge. Par contre, les boutons n°4 et n°8 restent dans l'état Be . Il faut attendre le passage au rouge du n°251 pour que l'état du 2008 passe en Br .

Le n°502 qui était dans l'état Be depuis le passage au rouge du n°2 repasse dans l'état Br puis dans l'état Rr et le n°1004, qui a changé d'état avec les boutons 2, 251, 502 se trouve dans l'état Be donc va finalement y rester.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Histoire d'angles

Parmi les triangles dont les angles sont des nombres entiers de degrés, existe-t-il un ou plusieurs triangles dont la somme d'un angle et du produit des deux autres fait 2008 ?

Solution (P.L.H.)

Soit a, b, c les trois naturels mesurant les angles du triangle. Si le triangle existe, on doit avoir $a + b + c = 180$ et $ab + c = 2008$.

Posons $a + b = s$ et $ab = p$.

On a $p = 2008 - c = 2008 - (180 - s) = 1828 + s$.

a et b sont alors racines de l'équation du second degré

$$x^2 - sx + 1828 + s = 0$$

dont le discriminant doit être un carré soit

$$s^2 - 4(1828 + s) = q^2 \quad \text{ou} \quad (s - 2)^2 - 4(1828 + 1) = q^2$$

$$(s - 2)^2 - q^2 = 4 \times 1829 = 2^2 \times 31 \times 59 \quad \text{ou} \quad (s - 2 - q)(s - 2 + q) = 2^2 \times 31 \times 59.$$

$s - 2 - q$ et $s - 2 + q$ ont la même parité et comme leur produit est pair, ils sont pairs tous les deux. On en déduit :

$$s - 2 + q = 2 \times 59 = 118 \quad \text{et} \quad s - 2 - q = 2 \times 31 = 62$$

$$\text{puis } s = 2 + \frac{118 + 62}{2} = 92 \quad \text{et} \quad q = \frac{118 - 62}{2} = 28;$$

les racines de l'équation $x^2 - sx + 128 + s = 0$ étant égales à $\frac{s \pm q}{2}$, si on appelle a la plus grande, on a

$$a = \frac{s + q}{2} = 60, \quad b = 32 \quad \text{et} \quad c = 180 - s = 88.$$

On vérifie que $ab + c = 1920 + 88 = 2008$.

Par construction, cette solution est unique.

Solution (A. Guillemot)

Soit x et y la mesure de deux angles d'un triangle avec $x \leq y$. (x est donc inférieur à 90)

La relation proposée peut donc s'écrire : $xy + 180 - x - y = 2008$ qui équivaut à $y(x - 1) = x + 1828$ (1)

Dans la relation (1), x ne peut pas être égal à 1.

La relation (1) est donc équivalente à $y = \frac{x + 1828}{x - 1}$

Examinons la table de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x + 1828}{x - 1}$ pour x entier à partir de 2 et recherchons toutes les valeurs de x telles que $f(x)$ soit un entier supérieur ou égal à x .

Graph1	Graph2	Graph3
$\backslash Y_1 \equiv (1828 + X) / (X - 1)$		
$\backslash Y_2 \equiv 180 - X - Y_1$		
$\backslash Y_3 =$		
$\backslash Y_4 =$		
$\backslash Y_5 =$		
$\backslash Y_6 =$		

X	Y ₁	Y ₂
30	64.069	85.931
31	61.967	87.033
32	60	88
33	58.156	88.844
34	56.424	89.576
35	54.794	90.206
36	53.257	90.743
X=32		

Une seule solution apparaît, pour $x = 32$ on a $f(x) = 60$.

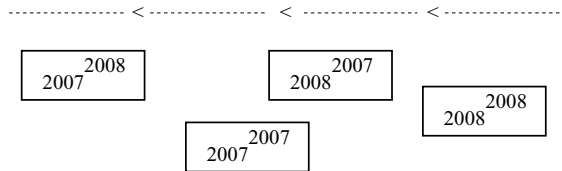
Donc il n'y a qu'un seul triangle répondant au problème et ses angles mesurent 32° , 60° et 88° .

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Ordre et étiquettes

Replacez chaque étiquette à la place qui convient.



Justifiez votre choix.

Toute justification, même partielle, sera valorisée.

On pourra faire un usage raisonné de la calculatrice.

Solution (P.L.H.)

Prenant les logarithmes, on est amené à comparer les quatre nombres :

$$2008 \log 2007, \quad 2007 \log 2007, \quad 2007 \log 2008, \quad \text{et} \quad 2008 \log 2008.$$

Par croissance de la fonction logarithme,

$$\begin{aligned} 2007 \log 2007 &< 2008 \log 2007 < 2008 \log 2008 \\ \text{et} \quad 2007 \log 2007 &< 2007 \log 2008 < 2008 \log 2008. \end{aligned}$$

Il reste à comparer $2008 \log 2007$ et $2007 \log 2008$.

Or $2008 \log 2007 - 2007 \log 2008$

$$\begin{aligned} &= 2008 \log 2007 - 2007 \log 2007 - 2007(\log 2008 - \log 2007) \\ &= \log 2007 - 2007 \left(\log \frac{2008}{2007} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \log \frac{2008}{2007} = \log \left(1 + \frac{1}{2007} \right) \leq \frac{0,434}{2007}$$

$$\text{d'où } 2007 \log \frac{2008}{2007} \leq 1, \text{ tandis que } \log 2007 \geq 3.$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2007 \log 2007 &< 2008 \log 2007 < 2007 \log 2008 < 2008 \log 2008 \\ \text{et} \quad 2007^{2007} &< 2007^{2008} < 2008^{2007} < 2008^{2008}. \end{aligned}$$