

LILLE

Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

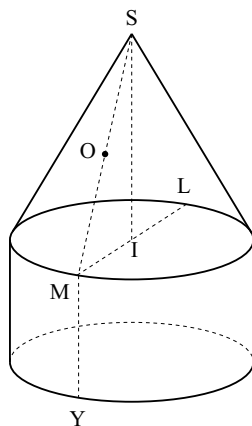
Un chapeau bizarre

Un chapeau a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur a (a réel strictement positif) et de base un cercle C de rayon a , surmonté d'un cône de révolution de sommet S et de base un cercle C' de centre I et de rayon a . M et L sont deux points diamétralement opposés sur le cercle C' , O est le milieu de $[MS]$ et Y est le point d'intersection de la parallèle à (SI) passant par M et du cercle C (voir figure ci-contre).

De plus $SM = 2a$.

On veut décorer l'extérieur du chapeau avec un ruban d'extrémités O et Y passant par le point L .

Quelle est, en fonction de a , la longueur minimale d'un tel ruban ?

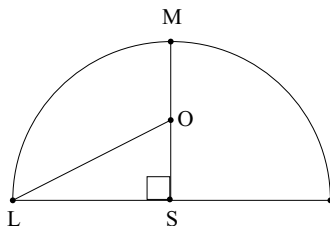


Solution

L'idée est de séparer cylindre et cône et de « développer » chacun des 2 solides.

Pour relier O à L . Le développement du cône donne un secteur de rayon $2a$ et d'arc de mesure $2\pi a$, la mesure de son arc est donc égale au demi-périmètre d'un cercle de rayon $2a$.

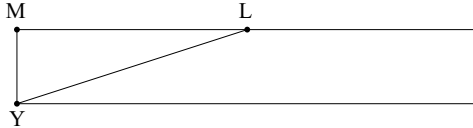
Le développement du cône est donc un demi-disque. La mesure du ruban sur le cône est la même sur son développement.



On obtient aisément :

$$OL = \sqrt{OS^2 + SL^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Pour relier L à Y Le développement du cylindre est un rectangle de dimensions a et $2\pi a$.



On obtient :

$$LY = \sqrt{LM^2 + MY^2} = \sqrt{a^2 + \pi^2 a^2} = a\sqrt{1 + \pi^2}.$$

Conclusion : la longueur minimale de ruban est égale à :

$$OL + LY = a\sqrt{5} + a\sqrt{1 + \pi^2}.$$

Exercice n° 2 (Série S)

Énoncé

Le drôle de partage

Héloïse possède des jetons numérotés. Son petit frère Mathis lui en réclame quelques-uns. Héloïse observe tous les numéros, elle vient d'apprendre la multiplication par 2 et décide : lorsque deux jetons portent des numéros dont l'un est le double de l'autre, elle en donne un à Mathis et dans un premier temps conserve l'autre.

Exemple :

Héloïse possède 5 jetons numérotés **1,2,3,4,5**.

- **Premier cas** : elle voit d'abord que 2 est le double de 1,
 - elle conserve 1, il lui reste donc **1,3,4,5**
 - ou elle conserve 2, il lui reste 2,3,4,5 mais 4 est le double de 2 elle donne donc le 2 ou le 4 finalement elle aura **3,4,5** ou **2,3,5**.
- **Deuxième cas** : elle voit d'abord que le double de 2 est 4
 - elle conserve le 2, il lui reste 1,2,3,5 mais 2 est le double de 1 donc finalement elle gardera **1,3,5** ou **2,3,5**.
 - elle conserve le 4, il lui reste **1,3,4,5**.

1. Héloïse possède 9 jetons numérotés de 1 à 9.

- Montrer qu'Héloïse conserve nécessairement moins de 7 jetons.
- Préciser tous les choix possibles de 6 jetons.

2. Héloïse possède 2008 jetons numérotés de 1 à 2008.

Combien peut-elle garder au maximum de jetons ?

Solution

Question 1

- Les couples (1,2), (4,8) et (3,6) sont impossibles. On supprime donc au moins 3 jetons.
- On conserve 5,7,9 puis on choisit judicieusement 3 éléments parmi 6.
Les possibilités sont : (on peut utiliser un arbre)

1-3-4-5-7-9 1-3-5-7-8-9

1-4-5-6-7-9 1-5-6-7-8-9

2-3-5-7-8-9 2-5-6-7-8-9

Question 2

Héloïse garde les numéros impairs ($2n + 1$) : **1004**

Il reste les numéros pairs, elle ne peut pas prendre ceux de la forme $2(2n + 1)$.

Parmi les numéros de la forme $4n$ elle garde ceux de la forme $4(2n + 1)$: **251**

Il reste les multiples de 8, elle ne peut pas prendre ceux de la forme $8(2n + 1)$.

Parmi les numéros de la forme $16n$ elle garde ceux de la forme $16(2n + 1)$: **63**

Il reste les multiples de 32, elle ne peut pas prendre ceux de la forme $32(2n + 1)$.

Parmi les numéros de la forme $64n$ elle garde ceux de la forme $64(2n + 1)$: **16**

Il reste les multiples de 128 elle ne peut pas prendre ceux de la forme $128(2n + 1)$.

Parmi les numéros de la forme $256n$ elle garde ceux de la forme $256(2n + 1)$: **4**

Il reste les multiples de 512, elle ne peut pas prendre ceux de la forme $512(2n + 1)$.

Parmi les numéros de la forme $1024n$ elle ne garde que 1024 : **1**

En conclusion Héloïse garde les numéros $2^\alpha \beta$ avec α et β entiers naturels, α pair et β impair.

Donc elle garde **$1004 + 251 + 63 + 16 + 4 + 1 = 1339$** jetons.

Héloïse a-t-elle pris le maximum de jetons ?

Première méthode :

Soit S l'ensemble de ces 1339 jetons et A un autre choix. Si dans A il y a au moins un jeton n'appartenant pas à S , il porte donc un numéro pair ($2k$). De plus k n'appartient pas à A et il appartient à S ² On peut remplacer dans A ($2k$) par k on obtient une partie qui a autant d'éléments que A , En procédant de cette manière sur chaque élément de A qui n'appartient pas à S on obtient un ensemble contenu dans S et qui a le même nombre d'éléments que A .

Deuxième méthode : Des couples impossibles.

Soit :

²On utilise le fait que si $2k$ n'appartient pas à S alors k appartient à S . En effet $2k$ peut s'écrire sous la forme $2^\alpha \beta$ avec α et β entiers naturels, α et β impairs ; k est donc dans S .

B_0 l'ensemble des couples $[(2p+1), 2(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 501 ; B_0 contient exactement 502 éléments.

B_4 l'ensemble des couples $[4(2p+1), 8(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 125 ; B_4 contient exactement 126 éléments.

B_{16} l'ensemble des couples $[16(2p+1), 32(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 30 ; B_{16} contient exactement 31 éléments.

B_{64} l'ensemble des couples $[64(2p+1), 128(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 7 ; B_{64} contient exactement 8 éléments.

B_{256} l'ensemble des couples $[256(2p+1), 512(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 1 ; B_{256} contient exactement 2 éléments.

Soit B la réunion de ces 5 ensembles. B contient exactement 669 de ces couples de la forme $(a, 2a)$; il y a donc au moins 669 éléments à éliminer systématiquement. Le nombre d'éléments restant est donc inférieur ou égal à $2008 - 669$, soit à 1339.

Donc avec 1339 jetons Héloïse a bien conservé le maximum de jetons possibles.

Remarque : On peut utiliser un crible pour obtenir la liste des numéros figurant dans S . On prend 1 on barre son double, on prend 3 on barre son double etc.

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Un « sudolympiade » (à rapprocher de Montpellier - ex. 4)

En partant des lettres déjà inscrites, remplir la grille de manière que chaque ligne, chaque colonne et chaque carré de 9 cases contienne une seule fois toutes les lettres du mot OLYMPIADE.

L			D	E		P	I	
	O		A	Y	P			M
D	A							
O	M	E		P		A	L	D
							O	Y
E			L	O	Y		A	
	P	O		D	A			L

Solution

L	Y	A	D	E	M	P	I	O
M	E	P	O	I	L	Y	D	A
I	O	D	A	Y	P	L	E	M
D	A	Y	M	L	O	I	P	E
O	M	E	Y	P	I	A	L	D
P	L	I	E	A	D	M	O	Y
E	I	M	L	O	Y	D	A	P
A	D	L	P	M	E	O	Y	I
Y	P	O	I	D	A	E	M	L

Exercice n° 4 (Séries autres que S)

Enoncé

Les palindromes

Un nombre palindrome est un nombre entier non nul qui peut se lire de la même manière dans les deux sens (par exemple : 12 321).

S'ils sont rangés dans l'ordre croissant, le premier de ces nombres est 1 alors que 55 porte le numéro 14. On dit aussi que 55 est le 14^{ème} nombre palindrome.

- 1) Quel est le 5^{ème} nombre palindrome ?
- 2) Quel est le 20^{ème} nombre palindrome ?
- 3) Donner le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres, puis celui du dernier nombre palindrome à 3 chiffres.
- 4) Un (très) jeune mathématicien, spécialiste des nombres palindromes, protège les résultats de ses recherches dans un coffre-fort dont la combinaison comporte quatre chiffres.

Pour se souvenir de la combinaison d'ouverture du coffre, le chercheur, âgé de 22 ans, utilise le seul nombre palindrome dont le quotient par son rang dans la liste des nombres palindromes est l'âge du mathématicien.

Quelle peut bien être la combinaison choisie par le savant ?

Solution

Questions 1, 2 et 3

Le cinquième nombre palindrome est 5, et le vingtième est 111. Le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres est 19, et celui du dernier est 108.

Question 4

L'énoncé admet l'existence et l'unicité de la solution.

On peut tout d'abord essayer de dénombrer les nombres palindromes qui nous intéressent.

Il existe 9 nombres entiers (1, 2, ..., 9) qui sont les premiers.

Puis viennent les nombres palindromes à deux chiffres, faciles à trouver comme 11, 22, ..., 99. Il en existe 9.

Puis viennent ceux dont l'écriture possède trois chiffres, comme 101, ou bien 242. Ils ont le même chiffre des centaines et des unités. Comme on ne peut pas prendre 0, il reste 9 possibilités couplées avec les 10 cas différents du chiffre des dizaines, soit 90 nombres palindromes à trois chiffres.

Les nombres palindromes à quatre chiffres ont les chiffres des milliers et des unités identiques, mais aussi les mêmes chiffres des centaines et des dizaines. C'est le cas de 3223, ou bien de 6776. Ils sont faciles à dénombrer, puisqu'il suffit de s'intéresser aux deux derniers chiffres. Pour les mêmes raisons que précédemment, on ne peut pas utiliser 0 comme chiffre des unités, ce qui laisse 90 cas différents.

D'où le tableau :

Nombres	<10	de 10 à 99	de 100 à 999	de 1000 à 9999
Effectifs	9	9	90	90
Effectifs cumulés	9	18	108	198

Finalement, les nombres qui nous intéressent sont les nombres palindromes de 1001 à 9999, c'est-à-dire ceux qui sont situés entre les places 109 et 198.

D'après l'énoncé, il faut que ces nombres palindromes soient multiples de 22.

Comme $22 = 2 \times 11$, on recherche des multiples de 2 et de 11.

Or, tout nombre palindrome est multiple de 11. Cela ne constitue donc pas un critère de choix. (En effet, soit *abba* un nombre palindrome à quatre chiffres, on a : $1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \times (91a + 10b)$).

Par ailleurs, les multiples de 2 se reconnaissent à leur terminaison, qui est 0, 2, 4, 6, ou 8. On a vu qu'il n'existait pas de nombre palindrome à quatre chiffres se terminant par zéro, donc la liste des éventualités est réduite ici à 40 nombres. Il suffit maintenant de lister les possibilités.

Il existe 10 nombres palindromes se terminant par 2. Le premier 2002 porte le numéro 119 dans le classement, alors que le dernier 2992 porte le numéro 128. Comme $119 \times 22 = 2618 > 2002$ et comme $128 \times 22 = 2816 < 2992$, on peut assurer que notre solution est comprise entre 2002 et 2992.

La calculatrice permet facilement de vérifier qu'il s'agit de 2772, situé au 126^{ème} rang dans la liste.