

LA GUYANE

Exercice n° 1

Enoncé

Les orthocentres

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

La perpendiculaire à (AB) passant par B et la perpendiculaire à (AC) passant par C se coupent en D .

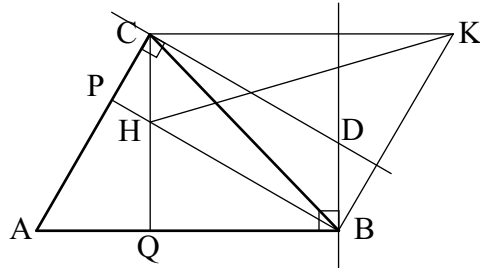
Calculer la distance entre les orthocentres des triangles ABC et BCD .

Solution

Première solution : Soient H et K les deux orthocentres.

• (CH) est une hauteur du triangle ABC , donc $(CH) \perp (AB)$.

On a donc $\begin{cases} (BD) \perp (AB) \\ (CH) \perp (AB) \end{cases}$ d'où $(BD) \parallel (CH)$



• (CK) est une hauteur du triangle BCD , donc $(CK) \perp (BD)$.

On a donc $\begin{cases} (BD) \perp (AB) \\ (CK) \perp (BD) \end{cases}$ d'où $(CK) \perp (CH)$

Le triangle KCH est donc rectangle en C . On a alors, d'après Pythagore : $HK^2 = CK^2 + CH^2$.

1. Calcul de CK .

(CK) est une hauteur du triangle BCD donc $(DB) \perp (CK)$.

On a donc $\begin{cases} (DB) \perp (AB) \\ (DB) \perp (CK) \end{cases}$ d'où $(AB) \parallel (CK)$.

On montre de la même façon que $(AC) \parallel (BK)$, ce qui permet d'affirmer que

ABKC est un parallélogramme. On en déduit : $CK = AB = 4$.

2. Calcul de CH .

Soient P et Q les pieds des hauteurs issues de B et C dans le triangle ABC.

Dans le triangle CAQ rectangle en Q, $\widehat{ACQ} = 90 - 60 = 30$ et donc, dans le triangle CPH rectangle en P on a :

$$CH = \frac{CP}{\cos 30} = \frac{2}{\sqrt{3}} CP$$

Dans le triangle ABP rectangle en P,

$$AP = AB \cos 60 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

D'où $CP = CA - AP = 3 - 2 = 1$ et donc : $CH = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Conclusion :

$$HK^2 = 16 + \frac{4}{3} = \frac{52}{3}.$$

D'où

$$HK = \sqrt{\frac{52}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{39} \approx 4,16.$$

Seconde solution : Les candidats de la série S peuvent aussi résoudre ce problème par d'autres méthodes. L'une d'entre elles consiste à utiliser la **formule d'Al-Kashi** pour calculer BC dans le triangle ACB. On trouve $BC = \sqrt{13}$.

Ensuite, après avoir remarqué que pour des raisons d'angles droits, les points B et C sont sur le cercle de diamètre HK , la **loi des sinus** dans le triangle BCK donne :

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BKC}} = 2R$$

Où R est le rayon du cercle. On conclut facilement en remarquant que $\widehat{BKC} = \widehat{CAB} = 60$ (puisque ACKB est un parallélogramme) et $HK = 2R$.

Troisième solution : Une autre méthode propre à la série S consiste à utiliser le **produit scalaire**. Comme ACKB est un parallélogramme, on peut écrire $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et on peut alors être tenté d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On écrit d'abord $\overrightarrow{AH} = a \overrightarrow{AB} + b \overrightarrow{AC}$. D'où : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = (a-1) \overrightarrow{AB} + b \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = a \overrightarrow{AB} + (b-1) \overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc avec $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$ et $AC^2 = 9$ on arrive à : $2a + 3b = 2$.

De même avec $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, et $AB^2 = 16$ on arrive à $8a + 3b = 3$.

On en déduit alors sans trop d'effort,

$$a = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad b = \frac{5}{9}.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{9} \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AH} = \frac{5}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{9} \overrightarrow{AC}.$$

Il suffit alors d'élever au carré pour conclure :

$$HK^2 = \frac{25}{36} AB^2 + \frac{16}{81} AC^2 + 2 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{9} \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{52}{3}.$$

Exercice n° 2

Enoncé

Tableaux d'entiers

On se propose de remplir des tableaux carrés avec des entiers naturels, puis d'inscrire à droite de chaque ligne et en dessous de chaque colonne la somme des entiers qu'elles contiennent.

2	0	0	8	10
1	1	5	1	8
2	2	0	1	5
2	0	0	0	2
7	3	5	10	

Il est bien sûr possible de répéter certains entiers plusieurs fois.

Voici, ci-dessus un exemple de tableau carré de 4 cases de côté, avec en caractères gras, les sommes par lignes et par colonnes.

- Montrer qu'on peut remplir un tableau carré de 4 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres entiers de 1 à 8.
- Peut-on remplir un tableau carré de 8 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres entiers de 1 à 16 ?
 - Peut-on remplir un tableau carré de 9 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres entiers de 1 à 18 ?

Solution

1. Les exemples ci-dessous montrent qu'il y a plusieurs solutions :

1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
1	3	0	0	4	1	2	1	0	4	0	0	1	1	2
0	0	5	0	5	0	1	4	0	5	1	2	2	2	7
0	0	1	7	8	0	0	1	7	8	2	2	2	2	8
2	3	6	7		2	3	6	7		3	4	5	6	

2.a) On peut remplir un tableau carré de 8 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres de 1 à 16 comme le montrent les exemples ci-dessous : (les cases vides contiennent des 0)

1								1									1
1	3							4							1	1	2
		5						5						1	1	1	3
		1	7					8					1	1	1	1	4
				9				9	1	1	1	2	2	2	2	2	13
				1	11			12	1	1	2	2	2	2	2	2	14
							13	13	1	2	2	2	2	2	2	2	15
							1	15	2	2	2	2	2	2	2	2	16
2	3	6	7	10	11	14	15		5	6	7	8	9	10	11	12	

Et il y a bien d'autres solutions encore...

Ainsi, par exemple, on peut partir d'un carré 2×2 donnant les sommes de 1 à 4, on rajoute ensuite 2 dans chaque case pour obtenir les sommes de 5 à 8 ; on rajoute encore 2 dans chaque case pour obtenir les sommes de 9 à 12 et enfin une dernière fois 2 pour obtenir les sommes de 13 à 16.

Exemple :

0	1	1	2	3	5	4	5	9	6	7	13
2	2	4	4	4	8	6	6	12	8	8	16
2	3		6	7		10	11		14	15	

Il ne reste plus ensuite qu'à placer ces quatre carrés 2×2 dans une diagonale du carré 8×8 et à compléter les cases vides avec des 0.

Remarques :

- 1) Au lieu de rajouter 2 dans chaque cellule, on peut aussi se contenter de rajouter 4 dans les cases d'une diagonale

Exemple :

<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	0	1	2	2	1	<table><tr><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr></table>	4	1	2	6	5	<table><tr><td>8</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>10</td></tr></table>	8	1	2	10	9	<table><tr><td>12</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>14</td></tr></table>	12	1	2	14	13
0	1																						
2	2																						
4	1																						
2	6																						
8	1																						
2	10																						
12	1																						
2	14																						
2 3		6 7		10 11		14 15																	

- 2) Cette méthode permet de construire n'importe quel carré de dimension $n \times n$ avec n pair.

Dans le cas du carré 8×8 , on aurait pu tout aussi bien partir d'un tableau carré 4×4 donnant les sommes de 1 à 8, et rajouter 2 dans chaque case ou 8 dans les cases d'une diagonale pour obtenir les sommes de 9 à 16.

Exemple :

<table border="1"><tr><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	6	0	0	0	2	3	0	0	0	4	0	0	0	0	2	1	6	<table border="1"><tr><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>11</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>4</td><td>8</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>9</td></tr></table>	14	0	0	0	2	11	0	0	0	4	8	0	0	0	2	9	14
6	0	0	0																																
2	3	0	0																																
0	4	0	0																																
0	0	2	1																																
14	0	0	0																																
2	11	0	0																																
0	4	8	0																																
0	0	2	9																																
8 7 2 1		16 15 10 9																																	

Il ne reste plus alors qu'à placer ces deux carrés 4×4 dans une diagonale du carré 8×8 et à compléter les cases vides avec des 0.

- 2.b) Par contre, on ne peut pas remplir un tableau carré de 9 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres de 1 à 18.

Explication : Si un tel tableau était possible, la somme totale de tous les nombres inscrits à droite de chaque ligne et en dessous de chaque colonne serait égale à la somme de tous les entiers de 1 à 18 soit : $1 + 2 + 3 + \dots + 17 + 18 = 171$.

Mais, d'autre part, cette somme est aussi égale à 2 fois la somme de tous les nombres du tableau (une fois en ligne et une fois en colonne). Or le tableau ne contenant que des entiers, le double de la somme des nombre est paire et ne peut donc pas être égale à 171 qui est impair.