

LA GUADELOUPE

Exercice n° 1

Enoncé

Inconnus bien connus

Montrer que si l'on prend six personnes au hasard, alors de deux choses l'une : soit au moins trois d'entre elles se connaissent toutes l'une l'autre, soit on peut en trouver trois parmi elles telles qu'aucune des trois n'en connaisse une autre (des trois).

Est-ce encore vrai si on considère plus de six personnes ? Et cinq personnes ?

Solution

On désigne par P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 les six personnes.

On considère P_1 . Sur les cinq autres, soit P_1 en connaît au plus deux, soit elle en connaît au moins trois.

Supposons que P_1 en connaît au moins trois, et soient P_2, P_3 et P_4 trois personnes connues de P_1 .

Si deux d'entre elles se connaissent, mettons P_2 et P_3 , alors P_1, P_2 et P_3 se connaissent toutes trois.

Sinon, P_2, P_3 et P_4 ne se connaissent pas du tout, et le résultat annoncé est encore juste.

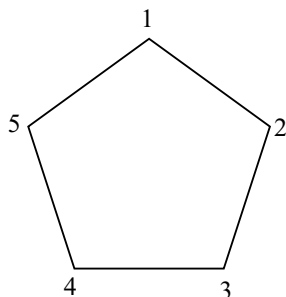
Si P_1 connaît au plus deux personnes du groupe, on raisonne avec les trois personnes que P_1 ne connaît pas.

On peut illustrer le problème par un graphe où chaque sommet correspond à une personne du groupe, et où deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les deux personnes se connaissent.

Cela revient à dire que pour tout graphe à six sommets, on peut trouver trois sommets deux à deux reliés par une arête, ou alors trois sommets du graphe sans arête reliant deux d'entre elles.

En prenant plus de six personnes le résultat reste vrai car il suffit de prendre les six premières personnes, les autres n'influençant pas leurs relations.

Mais le résultat est faux pour cinq personnes et peut être illustré par le graphe suivant :



Exercice n° 2

Enoncé

Géométrie : élémentaire !

Soit ABC un triangle ayant ses trois angles aigus et soit R le rayon de son cercle circonscrit. On considère DA , DB et DC les disques de rayon 1 et de centres respectifs A , B et C .

1. Montrer que si les disques DA , DB et DC recouvrent le triangle ABC alors $R \leq 1$.
2. Si $R \leq 1$ montrer que tout point P intérieur au triangle ABC appartient à l'un des disques D_A , D_B ou D_C .

Solution

- a) Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est intérieur au triangle puisque les angles du triangle sont aigus (triangle acutangle).

Si le triangle ABC est recouvert par les disques D_A , D_B et D_C , alors O est intérieur de l'un d'eux, donc sa distance à l'un des points A , B ou C est inférieure à 1, et $R \leq 1$.

- b) Si $R \leq 1$, soit M un point quelconque intérieur au triangle ABC .

Il est intérieur à l'un des triangles isocèles AOB , BOC , AOC , donc l'une au moins des conditions $MA \leq R$, $MB \leq R$, $MC \leq R$ est satisfaite.

Comme $R \leq 1$ le point M est intérieur à l'un des disques D_A , D_B ou D_C .