

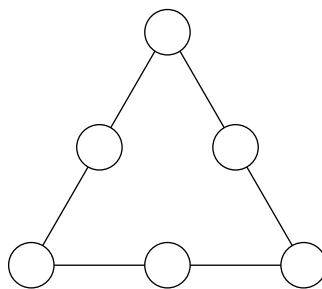
DIJON

Exercice n° 1

Enoncé

La bonne somme

On veut placer les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans les cercles représentés ci-contre, de telle sorte que la somme S des trois nombres placés sur chaque côté du triangle équilatéral soit la même sur les trois côtés.

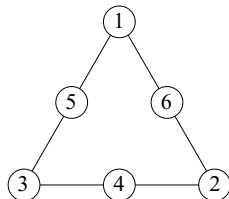


- 1) Donner une configuration solution du problème.
- 2) Quelles sont toutes les valeurs possibles de la somme S ?
- 3) Donner les configurations solutions, lorsqu'elles existent, pour toutes ces valeurs de la somme S .

(Deux solutions « images » l'une de l'autre par une rotation ou par une symétrie axiale laissant invariant le triangle seront considérées comme identiques).

Solution

- 1) Une configuration solution du problème. (voir ci-dessous)



- 2) Toutes les valeurs possibles de la somme S .
Appelons a, b, c , les nombres « posés » sur les sommets, la somme S vérifie :

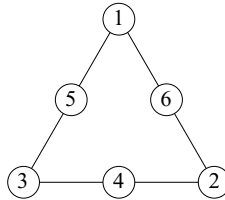
$3S = 21 + a + b + c$ soit $S = 7 + \frac{1}{3}(a + b + c)$. La valeur minimale de $a + b + c$ est $1 + 2 + 3 = 6$, la valeur maximale est $4 + 5 + 6 = 15$.

S ne peut donc prendre que les valeurs **9, 10, 11, 12**.

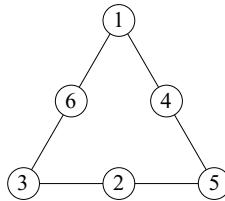
3) Les configurations solutions, lorsqu'elles existent, pour toutes ces valeurs de S .

Il faut étudier les 4 cas successivement.

- $S = 9$. donc $a + b + c = 6$. Cette somme ne peut être obtenue qu'avec le triplet $(1,2,3)$. On obtient la configuration ci-dessous.

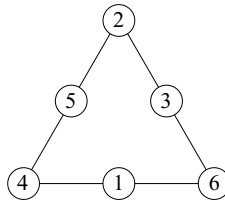


- $S = 10$. donc $a + b + c = 9$. Cette somme est obtenue avec les trois triplets $(1,2,6)$, $(1,3,5)$, $(2,3,4)$. le premier et le troisième triplet ne fournissent pas de solution, le deuxième conduit à la solution ci-dessous :



- $S = 11$. donc $a + b + c = 12$. Cette somme est obtenue avec les trois triplets $(1,5,6)$, $(2,4,6)$, $(5,3,4)$.

Le premier et le troisième triplet ne fournissent pas de solution, le deuxième conduit à la solution ci-dessous :



- $S = 12$. donc $a + b + c = 15$. Cette somme est obtenue avec le seul triplets $(4,5,6)$ qui fournit une quatrième et dernière solution « duale » de la première.

Exercice n° 2

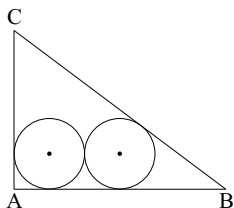
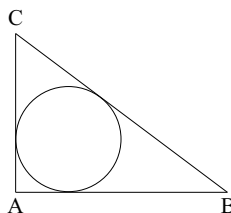
Enoncé

« **La Sangaku** » (à rapprocher de Bordeaux - Ex. 1 et Corse - Ex. 1)

Au Japon, les Sangakus sont des tablettes commémoratives offertes dans un sanctuaire pour remercier les dieux de la découverte d'un théorème ; elles comportent des problèmes de géométrie qui mettent en jeu des cercles inscrits dans une figure donnée.

Dans le problème qui suit, on considère un triangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives $AB = 4$ et $AC = 3$.

- 1) Calculer le rayon r_1 du cercle inscrit dans ce triangle.
(On pourra exprimer de deux manières l'aire de ce triangle.)

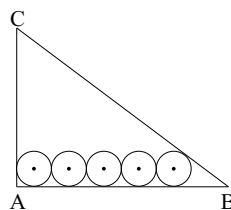


- 2) Deux cercles de même rayon sont tangents à deux côtés du triangle et tangents entre eux, comme sur la figure ci-contre.

Calculer le rayon de chacun de ces cercles.

- 3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère n cercles tous tangents au côté $[AB]$, tels que de plus :

- le premier est tangent au côté $[AC]$ et au deuxième cercle ;
- le dernier est tangent au précédent et au côté $[BC]$;



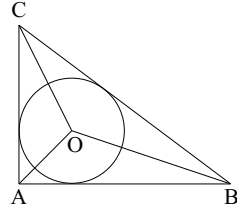
– chacun des autres est tangent à ses deux voisins. La figure ci-contre représente le cas .

- a) Exprimer en fonction de n le rayon de chaque cercle.
b) Pour quelle valeur de n ce rayon est-il égal à $\frac{1}{2008}$?

Solution

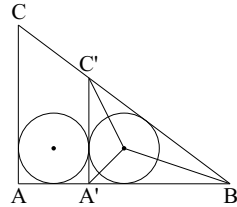
1) Calcul du rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle :

Chacun des triangles OAB, OAC, OBC a une hauteur égale à r , la somme de leurs aires est égale à l'aire du triangle ABC donc $3r + 4r + 5r = 12$ et $r = 1$.



2) Calcul du rayon r_2 de chacun des deux cercles inscrits dans le triangle :

Posons $2\alpha = A'B = 4 - 2r$. Comme les triangles ABC et A'BC' sont semblables, on a $A'C' = \frac{3}{4} \times 2\alpha = \frac{3}{2} \alpha$ et $BC' = \frac{5}{2} \alpha$ où $(A'C')$ est la tangente commune aux deux cercles.



Puisque O est le centre du cercle inscrit au triangle A'BC', on peut reprendre le raisonnement de 1^o). On obtient : $\frac{3}{4} \alpha r + \frac{5}{4} \alpha r + \alpha r = \frac{3}{2} \alpha^2$ soit $r = \frac{1}{2} \alpha$ puisque dans cette question $\alpha = 2 - r$, $r = \frac{2}{3}$.

3) n entier supérieur ou égal à 2.

a) Exprimer en fonction de n le rayon r_n de chaque cercle.

Le résultat précédent s'applique avec $2\alpha = 4 - 2(n-1)r$ soit $\alpha = 2 - (n-1)r$.

On obtient $r = \frac{2}{n+1}$.

b) Ce rayon est égal à $\frac{1}{2008}$ si $n = 4\,015$.