

CRÉTEIL

Exercice n° 1

Enoncé

Des rectangles amicaux

On considère deux rectangles R et S dont les dimensions sont des entiers naturels non nuls.

On dira que ces deux rectangles R et S constituent « une paire de rectangles amicaux » lorsque le périmètre du rectangle R est égal à l'aire du rectangle S et lorsque l'aire du rectangle R est égal au périmètre du rectangle S.

1. a) Le rectangle R de dimensions 1 et 38 et le rectangle S de dimensions 6 et 13 constituent-ils « une paire de rectangles amicaux » ?
 b) Le rectangle R a pour dimensions 2 et 10 .
 Peut-on trouver un (ou des) rectangle(s) S tel que R et S constituent « une paire de rectangles amicaux » ? Si oui, déterminer ce (ou ces) rectangle (s) .
 c) On sait que le rectangle R a une dimension égale à 3 et que le rectangle S a une dimension égale à 8.
 Peut-on trouver des rectangles R et S constituant « une paire de rectangles amicaux » ?
2. On note a, b les dimensions du rectangle R, c et d les dimensions du rectangle S. On suppose que les entiers naturels a, b, c et d vérifient : $a \leq b, c \leq d$ et $a \leq c$.
 Etablir que $1 \leq c \leq 8$ et $1 \leq a \leq 4$.
 Déterminer alors toutes « les paires de rectangles amicaux ».

Solution (P.L.H.)

R et S de dimensions (a, b) et (c, d) constituent une paire de rectangles amicaux si et seulement si

$$\begin{cases} 2(a+b) = cd \\ 2(c+d) = ab \end{cases} \quad \text{et } a, b, c, d \text{ naturels non nuls}$$

1.a) $2(1 + 38) = 78 = 6 \times 13$ et $2(6 + 13) = 38 = 1 \times 38$
 $(1, 38)$ et $(6, 13)$ sont donc amicaux.

b) $cd = 2(10 + 2) = 24$ et $2(c + d) = 20$ donc $c + d = 10$.
 c et d sont racines de l'équation $x^2 - 10x + 24 = 0$ donc égaux à 4 et 6.
 $(2, 10)$ et $(4, 6)$ sont amicaux.

c) Le système $2(a + 3) = 8c$ et $2(c + 8) = 3a$ a pour seule solution
 $a = 7$ et $c = 2,5$ qui ne convient pas car non entier.

2. Si (a, b) et (c, d) constituent une paire de rectangles amicaux.

On a $cd = 2(a + b)$ et $2d = ab - 2c$

D'où $4(a + b) - c(ab - 2c) = 0$ ou $b(ac - 4) = 4a + 2c^2$

b, a, c étant des naturels non nuls, on en déduit $(ac - 4) > 0$,
 puis $ac \geq 5$ d'où $c^2 \geq ac \geq 5$ donc $c \geq 3$.

De même en réécrivant le système $\begin{cases} 2b = cd - 2a \\ ab = 2c - 2d \end{cases}$

on obtient $a(cd - 2a) = 2ab = 4(c + d)$

d'où $2a^2 + 4c = d(ac - 4) \geq da^2 - 4d$ ou $a^2(d - 2) \leq 4(c + d)$.

Mais $d \geq c \geq 3$ donc $d \geq 3$

$$\text{et } a^2 \leq 4 \frac{c + d}{d - 2} = \frac{4(d - 2) + 4c + 8}{d - 2} \\ = 4 + \frac{4c + 8}{d - 2} \leq 4 + \frac{4d + 8}{d - 2} = 4 + \frac{4(d - 2) + 16}{d - 2} = 8 + \frac{16}{d - 2}.$$

Par ailleurs $(a + b)^2 \geq 4ab$ d'où $4(a + b)^2 \geq 16ab$ et $c^2 d^2 \geq (c + d)$.

De $4cd \leq (c + d)^2$ on déduit $32(c + d) \leq \frac{(c + d)^4}{16}$ et $(c + d)^3 \geq 16 \times 32 = 8^3$.

Donc $2d \geq c + d \geq 8$ et $d \geq 4$.

Finalement $a^2 \leq 8 + \frac{16}{d - 2} \leq 8 + \frac{16}{4 - 2} = 16$ et $a \leq 4$.

On a $2a^2 + 4c = d(ac - 4) \geq c(ac - 4)$ ou $ac^2 - 8c - 2a^2 \leq 0$.

c doit être compris entre les racines de l'équation $ax^2 - 8xd - 2a^2 = 0$

égales à $\frac{4 \pm \sqrt{16 + 2a^3}}{a}$.

On a donc $c \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 2a^3}}{a}$

Pour les quatre valeurs possibles de a , de 1 à 4 le membre de droite est majoré respectivement par

$$4 + \sqrt{8} < 9, \quad \frac{4 + \sqrt{32}}{2} < 5, \quad \frac{4 + \sqrt{70}}{3} < 5 \text{ et } \frac{4 + \sqrt{144}}{4} = 4.$$

Dans tous les cas on a bien $c \leq 8$.

Pour déterminer toutes les paires de rectangles amicaux, il suffit donc de faire varier a de 1 à 4 et c de 3 à 8 pour $a = 1$ et de 3 à 4 pour $a > 1$, on obtient b

et d en utilisant les formules

$$b = \frac{4a + 2c^2}{ac - 4} \quad \text{et} \quad d = \frac{2a^2 + 4c}{ac - 4}.$$

On trouve ainsi les sept paires

(1, 54); (5, 22) (2, 13); (3, 10) (4, 4); (4, 4) (1, 38); (6, 13)
(2, 10); (4, 6) (1, 34); (7, 10) (3, 6); (3, 6).

La paire (1, 33); (8, 85) ne convient pas car d doit être entier.

Remarque

Les trois questions 1.a, 1.b et 1.c sont faciles.

Déterminer les paires de rectangles amicaux en utilisant les inégalités $1 \leq c \leq 8$ et $1 \leq a \leq 4$ repose sur la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Par contre, trouver le bon chemin pour démontrer ces inégalités nécessite beaucoup d'imagination et de maîtrise des inéquations.

Solution (A. Guillemot)

1a) $2(1 + 38) = 78 = 6 \times 13$ et $1 \times 38 = 2(6 + 13)$ donc les rectangles S et T constituent une paire de rectangles amicaux.

1b) Soit c et d les dimensions de S (avec $c \leq d$), on a les relations : $c \times d = 24$ et $2(c + d) = 20$

Un seul couple d'entiers répond à ces conditions, c'est le couple (4; 6)

1c) Soit b et d les dimensions manquantes.

La relation $2(3 + b) = 8d$ implique que b est un impair.

La relation $3b = 2(8 + d)$ implique que b est pair.

Donc dans cette situation il n'y a pas de solution.

2) Pour résoudre cette question nous allons utiliser les possibilités qu'offre la TI-Nspire en programmation.

Soit a et b les dimensions de R avec $a \leq b$

Soit c et d les dimensions de S avec $c \leq d$, on suppose en outre que $a \leq c$.

On a les relations : $2a + 2b = cd$ (1) et $2c + 2d = ab$ (2)

$$a \leq b \text{ et (1)} \Rightarrow 4b \geq cd \Rightarrow b \geq \frac{cd}{4}$$

$$c \leq d \text{ et (2)} \Rightarrow 4d \geq ab \Rightarrow 4d \geq \frac{acd}{4} \Rightarrow 16 \geq ac.$$

Comme $a \leq c$ on a $16 \geq a^2$ donc $1 \leq a \leq 4$.

Il suffit maintenant de faire varier a de 1 à 4, c de a à $\frac{16}{a}$ et résoudre le système

formé des équations (1) et (2).

Le programme va résoudre 27 systèmes, seules seront admises les solutions entières vérifiant $c \leq d$.

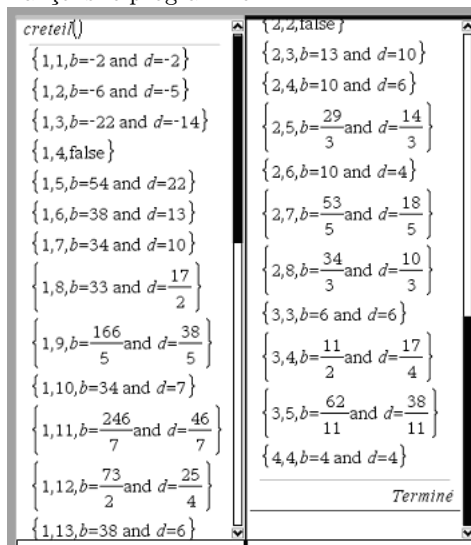
Pour cela utilisons le programme suivant :

```

Define      Prgm
creteil() = For a, 1, 4
             For c, a, 16/a
               eq1 := 2a + 2b = c * d
               eq2 := 2c + 2d = a * b
               solve(eq1 and eq2, {b, d}) →
               r
             Disp{a, c, r}
             EndFor
             EndFor
             EndPrgm

```

Lançons le programme :



(pour simplifier la mise en page, on a choisi une copie d'écran « ordinateur », avec la calculatrice on obtient la même chose en plusieurs écrans.)

Parmi les 27 résultats ci-dessus, 7 correspondent aux conditions imposées.

Nous avons donc 5 « paires de rectangles amicaux ».

(1; 54) et (5; 12) (1; 38) et (6; 13) (1; 34) et (7; 10) (2; 13) et (3; 10) (2; 10) et (4; 6)

et deux rectangles « auto-amicaux » (3; 6) et (4; 4)

Autre approche (d'après une idée de France et Michel Villiaumey)

La solution précédente fournit les solutions de 27 systèmes et nous laisse le soin de choisir les réponses qui conviennent au problème. Grâce aux possibilités de TI-Nspire nous allons faire en sorte que n'apparaissent que les 7 solutions ci-dessus.

Commençons par résoudre formellement le système :

$$\begin{cases} 2a + 2b = cd \\ 2c + 2d = ab \end{cases}$$

Ensuite on affecte ces résultats dans les variables b et d .

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 2 \cdot a + 2 \cdot b = c \cdot d \\ 2 \cdot c + 2 \cdot d = a \cdot b \end{cases}, b, d\right)$$

$$b = \frac{2 \cdot (2 \cdot a + c^2)}{a \cdot c - 4} \text{ and } d = \frac{2 \cdot (a^2 + 2 \cdot c)}{a \cdot c - 4}$$

$$b := \frac{2 \cdot (2 \cdot a + c^2)}{a \cdot c - 4} \quad \frac{2 \cdot (2 \cdot a + c^2)}{a \cdot c - 4}$$

$$d := \frac{2 \cdot (a^2 + 2 \cdot c)}{a \cdot c - 4} \quad \frac{2 \cdot (a^2 + 2 \cdot c)}{a \cdot c - 4}$$

Utilisons le programme **crêteil1** qui va tester si b et d répondent aux conditions imposées quand on fait varier a de 1 à 4 et c de a à $\frac{16}{a}$.

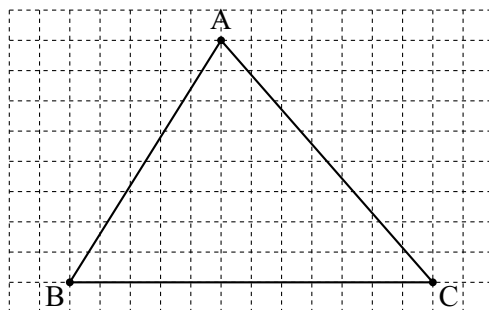
crêteil1()					crêteil1	7
a	b	c	d	Define crêteil1 ()=		
1	54	5	22	Frgm		
1	38	6	13	Disp "a b c d"		
1	34	7	10	For a,1,4		
2	13	3	10	For c,a, $\frac{16}{a}$		
2	10	4	6	If b=int(b) and d=int(d) and c≤d		
3	6	3	6	Disp a," ",b," ",c," ",d		
4	4	4	4	EndFor		
				EndFor		
				EndFrgm		
Terminé						

Le programme ne nous affiche que les solutions recherchées.

Exercice n° 2

Enoncé

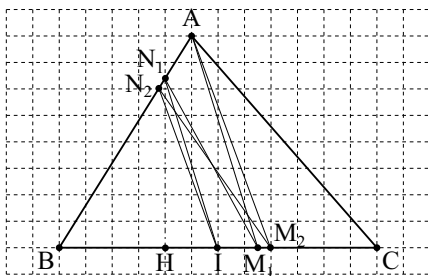
Encore un peu d'aires (à rapprocher de Amiens - Ex. 2)



Soient A, B et C trois points représentés sur la figure ci-dessus.

- On place le point N_1 sur le segment $[AB]$ tel que $BN_1 = \frac{4}{5}BA$ et le point M_1 sur le segment $[BC]$ tel que $BM_1 = \frac{5}{8}BC$.
Comparer les aires du triangle BN_1M_1 et du quadrilatère AN_1M_1C .
- On place le point M_2 sur le segment $[BC]$ tel que $BM_2 = \frac{2}{3}BC$.
Où placer le point N_2 sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du triangle BN_2M_2 soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC ?
- On place le point I milieu du segment $[BC]$.
 - Que peut-on dire des droites (IN_1) et (AM_1) ?
 - Que peut-on dire des droites (IN_2) et (AM_2) ?
 - Soient M un point du segment $[IC]$ et N le point du segment $[AB]$ tel que les droites (IN) et (AM) soient parallèles.
Comparer les aires du triangle BMN et du quadrilatère $ANMC$.

Solution (Paul-louis Hennequin)



- Soit H le pied de la hauteur N_1H du triangle BN_1M_1 . N_1H est égale à $\frac{4}{5}$ de la hauteur du triangle ABC . Par construction, $BM_1 = \frac{5}{8}BC$.

L'aire du triangle BN_1M_1 est donc égale au produit de l'aire du triangle ABC par $\frac{4}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$. L'aire du quadrilatère AN_1M_1C est donc elle aussi la moitié de l'aire du triangle ABC .

On doit avoir $\frac{BN_2}{BA} \times \frac{BM_2}{BC} = \frac{1}{2}$ ou $\frac{BN_2}{BA} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

- $\frac{4}{5} = \frac{BN_1}{BA} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{BI}{BC} \times \frac{BC}{BM_1} = \frac{BI}{BM_1}$. Les droites (IN_2) et (AM_1) sont parallèles.

- De même $\frac{3}{4} = \frac{BN_2}{BA} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{BC}{BM_2} \times \frac{BI}{BC} = \frac{BI}{BM_2}$. Les droites (IN_2) et (AM_2) sont parallèles.

c) On a, comme en 1 :

$$\frac{\text{aire}(BMN)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{BM \times BN}{BC \times BA} = \frac{BM}{BC} \times \frac{BI}{BM} = \frac{BI}{BC} = \frac{1}{2}$$

et l'aire du triangle BMN est bien égale à celle du quadrilatère ANMC.