

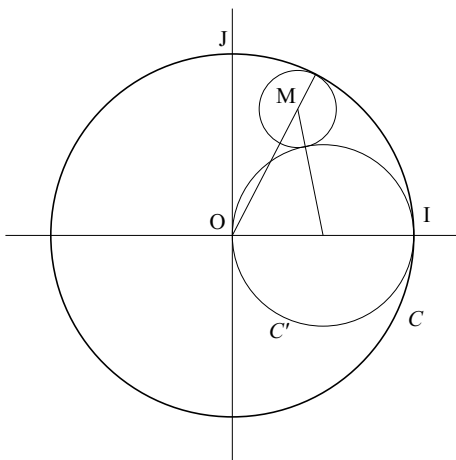
CORSE

Exercice n° 1

Enoncé

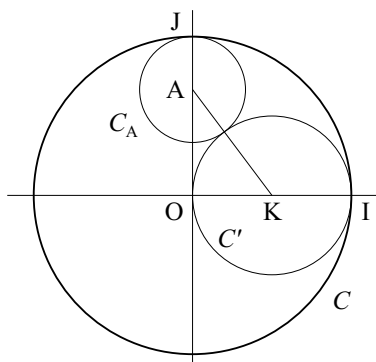
Cercles tangents (à rapprocher de Bordeaux - Ex. 1)

Dans un repère orthonormé du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $I(1,0)$ et $J(0,1)$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (C') le cercle de diamètre $[OI]$. Dans cet exercice on étudie des cercles tangents intérieurement à (C) et tangents extérieurement à (C') , comme le montre cette figure.



1. Déterminer le rayon du cercle (C_A) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C') , dont le centre A est un point du segment $[OJ]$.
2. Déterminer le rayon d'un cercle (C_B) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C') , dont le centre B a pour abscisse $\frac{1}{2}$.
3. Soit M un point de coordonnées positives (x, y) centre d'un cercle (C_M) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C') et à (C_A) . Déterminer le rayon de (C_M) et les coordonnées de son centre.

Solution



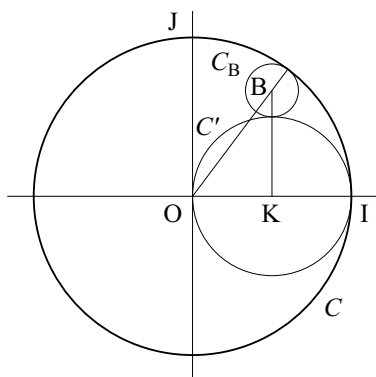
1- Soit R le rayon de (C_A) .

$$OA = 1 - R \quad AK = R + \frac{1}{2} \quad OK = \frac{1}{2}$$

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAK donne :

$$(1 - R)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(R + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ soit}$$

$$1 - 2R + R^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + R + R^2 \text{ d'où } 3R = 1 \text{ donc } R = \frac{1}{3}.$$



2- Soit R le rayon de (C_B) .

$$OB = 1 - R \quad BK = R + \frac{1}{2} \quad OK = \frac{1}{2}$$

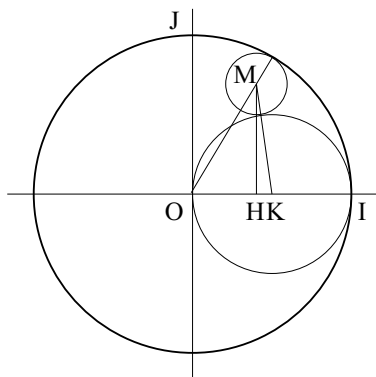
Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OKB donne :

$$\left(R + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1 - R)^2 \text{ soit}$$

$$\frac{1}{4} + R + R^2 + \frac{1}{4} = 1 - 2R + R^2 \text{ d'où } 3R = \frac{1}{2} \text{ donc } R = \frac{1}{6}.$$

3- Le cercle (C_M) de rayon R est tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C') . Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI).

OM^2 s'exprime d'une part à l'aide de R par $(1 - R)^2$ et d'autre part à l'aide de x et y par $x^2 + y^2$ donc $x^2 + y^2 = (1 - R)^2$.



MK^2 s'exprime d'une part à l'aide de R par $\left(R + \frac{1}{2}\right)^2$ et d'autre part à l'aide de x et y par

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \text{ donc } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(R + \frac{1}{2}\right)^2.$$

MA^2 s'exprime d'une part à l'aide de R par $\left(R + \frac{1}{3}\right)^2$ et d'autre part à l'aide de x et y par

$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \text{ donc } x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(R + \frac{1}{3}\right)^2.$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (1 - R)^2 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(R + \frac{1}{2}\right)^2 \\ x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(R + \frac{1}{3}\right)^2 \end{cases}$$

Par soustraction des lignes, on élimine x^2 ou y^2 :

$$\begin{cases} x^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (1 - R)^2 - \left(R + \frac{1}{2}\right)^2 \\ y^2 - \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = (1 - R)^2 - \left(R + \frac{1}{3}\right)^2 \\ x^2 + y^2 = (1 - R)^2 \end{cases}$$

Ce qui donne, après développement :

$$\begin{cases} x = 1 - 3R \\ y = 1 - 2R \\ x^2 + y^2 = (1 - R)^2 \end{cases}$$

Par substitution, nous obtenons donc, dans la troisième équation $(1 - 3R)^2 + (1 - 2R)^2 = (1 - R)^2$.

Soit $12R^2 - 8R + 1 = 0$.

$\Delta = 64 - 4 \times 12 = 16$, l'équation donne donc $R = \frac{8+4}{24} = \frac{1}{2}$ ou $R = \frac{8-4}{24} = \frac{1}{6}$

Observons que $x > 0$ donc $1 - 3R > 0$ soit $R < \frac{1}{3}$. Donc la seule solution est

$$R = \frac{1}{6}.$$

Ainsi

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ y = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Cela montre que ce cercle n'est autre que le cercle (C_B) .

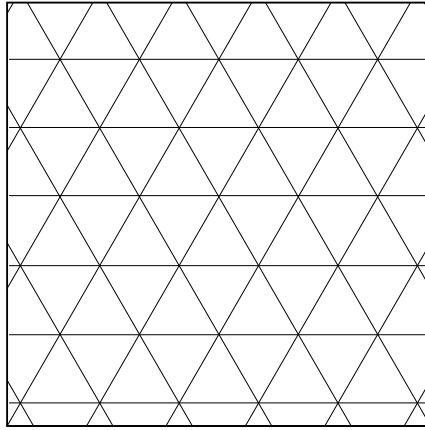
Exercice n° 2

Enoncé

Balade sur une grille

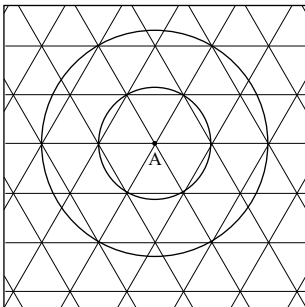
Dans le plan on considère une « grille » notée G , formée par l'ensemble des **sommets** des triangles équilatéraux de côtés de longueur 1 comme le montre la figure. Pour tous points A et B de cette grille, on appelle G -distance de A et B , notée $d_G(A, B)$ la longueur du plus court chemin reliant A à B par les côtés des triangles. Pour tout point A de la grille et pour tout réel r , on appelle G -cercle de centre A et de rayon r , l'ensemble des points M de la grille tels que $d_G(A, M) = r$. On appelle G -disque de centre A et de rayon r , l'ensemble des points M de la grille tels que $d_G(A, M) \leq r$.

1. Soit A un point donné de la grille, donner le nombre de points de la grille du G-cercle de centre A et de rayon 2 et du G-disque de centre A et de rayon 2.
2. Déterminer le nombre de points de G appartenant au G-disque de centre A et de rayon 2008.
3. Démontrer que pour tous points M, N et P de G, $d_G(M,N) \leq d_G(M,P) + d_G(P,N)$.
4. On appelle G-segment MN, l'ensemble de tous les points P de G tels que $d_G(M,N) = d_G(M,P) + d_G(P,N)$.
 - a) Sachant que $d_G(M,N) = 4$, quel est le nombre de points du G-segment MN ?
 - b) Sachant que $d_G(M,N) = 2008$, quel est le nombre maximal de points du G-segment MN ?



On pourra utiliser le résultat suivant : pour tout entier naturel non nul n ,
 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Solution



1- Le G-cercle de centre A et de rayon 2 est l'ensemble des 12 points de la grille situés sur l'hexagone de centre A inscrit dans un cercle de rayon 2.

Le G-disque de centre A contient A et les points de G situé sur les G-cercles de centre A et de rayons respectifs 1 et 2.

Le G-disque de centre A contient donc $1 + 6 + 12$ points soit **19 points**.

- 2- De même le G-cercle de centre A et de rayon 2008 est l'ensemble des points de la grille situés sur l'hexagone de centre A inscrit dans un cercle de rayon

2008 et donc de côté 2008.

Il ya donc 6×2008 points.

Le G-disque de centre A et de rayon 2008 est la réunion de A et de 2008 G-cercles de rayons 1, 2,..., 2008.

Le nombre total de points du G-disque de centre A et de rayon 2008 est donc

$$1 + 6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + \cdots + 6 \times 2008 = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + 2008) \\ = 1 + 6 \times \frac{2008 \times 2009}{2} = 12\,102\,217.$$

- 3- Pour tous points M, N et P de G, le plus court chemin qui mène de M à P de longueur $d_G(M,P)$ suivi du plus court chemin qui mène de P à N de longueur $d_G(P,N)$, est un des chemins qui mène de M à N de longueur $d_G(M,P) + d_G(P,N)$.

$d_G(M,N)$ est la longueur du plus court chemin qui mène de M à N donc par définition $d_G(M,N) \leq d_G(M,P) + d_G(P,N)$.

- 4- a) Si $d_G(M,N) = 4$, alors

- soit M et N sont sur une même droite de la grille et le G-segment MN compte 5 points.

- soit M et N sont les sommets opposés d'un parallélogramme de côtés 3 et 1 et le G-segment MN compte 8 points.

- soit M et N sont les sommets opposés d'un parallélogramme de côtés 2 et 2 et le G-segment MN compte 9 points.

b) Si $d_G(M,N) = 2008$, alors

- soit M et N sont sur une même droite de la grille et le G-segment MN compte 2009 points,

- soit M et N sont les sommets opposés d'un parallélogramme de côtés a et b , ou a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a + b = 2008$. Le G-segment MN compte alors $(a + 1)(b + 1)$ points.

$$(a + 1)(b + 1) = (a + 1)(2008 - a + 1) = (a + 1)(2009 - a) \\ = -a^2 + 2008a + 2009 = 2009 - [(a - 1004)^2 - 1004^2] \\ = 1\,101\,025 - (a - 1004)^2 \leq 1\,101\,025.$$

Le nombre maximal de points du G-segment MN est donc **1 010 025** obtenu pour $a = 1004$.