

# CLERMONT-FERRAND

## Exercice n° 1 (Toutes séries)

### Enoncé

#### Puissance de calcul

Les organisateurs d'un concours mathématique ont découvert que le nombre total de participants avait la particularité suivante : il s'agit d'un nombre de quatre chiffres sans zéro qui est égal à la somme de ses chiffres élevés chacun à sa propre puissance (exemple :  $2^2$  ou  $5^5$ ).

1. Le chiffre 6 peut-il figurer dans ce nombre ?
2. Combien de fois le chiffre 5 doit-il figurer ?
3. Déterminer le nombre de candidats.

### Solution

1.  $N = 1000x + 100y + 10z + t$

$6^6 > 9999$  donc **le chiffre 6 ne peut pas figurer.**

A plus forte raison, tous les chiffres supérieurs sont exclus.

2. Donc le plus grand chiffre possible est 5 et  $1111 \leq N \leq 5555$ .

- si aucun 5, le plus grand  $N$  est  $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 1024$ ; ce nombre est inférieur à 1111. Ce cas est donc impossible.
- si au moins deux chiffres 5, alors  $N \geq 2(5^5) > 5555$ . Ce cas est donc impossible.
- donc  $N$  **comporte un chiffre 5 et un seul.**

3. Ainsi  $N \leq 5^5 + 4^4 + 4^4 + 4^4$ ; donc  $N < 4000$ .

Or  $N > 5^5 > 3000$ . Donc le premier chiffre est  $x = 3$ .

Et  $N = 5^5 + 3^3 + a^a + b^b = 3152 + a^a + b^b$ .

Il reste donc à envisager tous les cas possibles pour  $a$  et  $b$  :

$a = 4$  et  $b = 4$        $N = 3664$     impossible (6)

$a = 4$  et  $b = 3$        $N = 3435$

$a = 4$  et  $b = 2$        $N = 3412$     impossible (pas de 5)

$a = 4$  et  $b = 1$        $N = 3409$     impossible (9)

|                    |            |                                           |
|--------------------|------------|-------------------------------------------|
| $a = 3$ et $b = 3$ | $N = 3206$ | impossible (6)                            |
| $a = 3$ et $b = 2$ | $N = 3183$ | impossible (8)                            |
| $a = 3$ et $b = 1$ | $N = 3180$ | impossible (8)                            |
| $a = 2$ et $b = 2$ | $N = 3160$ | impossible (6)                            |
| $a = 2$ et $b = 1$ | $N = 3157$ | impossible (7)                            |
| $a = 1$ et $b = 1$ | $N = 3664$ | impossible (on ne trouve pas les deux 1). |

Donc une solution et une seule :  $N = 3435$ . Il y avait **3435** participants.

## Solution (A. Guillemot)

1)  $6^6 = 46656$  donc il n'y a pas de chiffre supérieur à 5 dans l'écriture du nombre recherché. Ce nombre est donc inférieur ou égal à 5555.

2)  $5^5 = 3125$  donc le chiffre 5 figure au plus une fois (sinon le nombre recherché serait supérieur à 6250, ce qui est contradictoire avec le résultat de la question précédente.)

Si le chiffre 5 n'apparaissait pas, le nombre cherché serait inférieur ou égal à  $4 \times 4^4 = 1024$ . Tous les nombres de quatre chiffres inférieurs à 1024 contiennent au moins un zéro, d'après l'énoncé ce n'est pas possible. Donc le chiffre 5 apparaît une fois exactement dans le nombre recherché.

3) Sachant que tous les chiffres du nombre recherché sont compris entre 1 et 5, un petit programme va nous donner rapidement la réponse.

```
PROGRAM:CLERMONT
:For(A,1,5)
:For(B,1,5)
:For(C,1,5)
:For(D,1,5)
:If 1000A+100B+10C+D=A^A+B^B+C^C+D^D
```

```
PROGRAM:CLERMONT
:Disp (A,B,C,D)
:End
:End
:End
:End
:
```

```
Pr9mCLERMONT
      (3 4 3 5)
      Fait
3^3+4^4+3^3+5^5
      3435
```

Le programme nous permet d'affirmer que le nombre de candidats est 3435.

## Exercice n° 2 (Série S)

### Enoncé

#### Jeu de balles

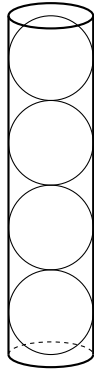


Schéma 1

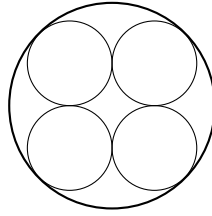


Schéma 2

Quatre balles de tennis de rayon  $r$  sont rangées dans une boîte cylindrique en carton, ayant un couvercle qui a la forme du fond.

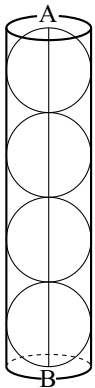
Deux rangements sont envisagés :

1. les balles sont rangées suivant le schéma 1, la balle n°4 étant en contact avec le couvercle de la boîte.
2. Les quatre balles reposent sur le fond de la boîte tout en étant en contact avec le couvercle.

Quelle boîte nécessite le moins de carton, dans chacun des cas suivants :

1. les couvercles des boîtes sont en carton ?
2. les couvercles des boîtes sont en plastique ?

### Solution

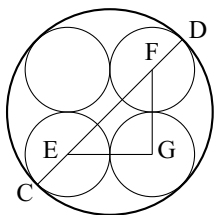


**Avec le couvercle en carton :**

$$\text{Aire carton boîte} = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r \times 8r = 18\pi r^2$$

**Avec le couvercle en plastique :**

$$\text{Aire carton boîte} = \pi r^2 + 2\pi r \times 8r = 17\pi r^2.$$



EFG est un triangle rectangle en G car il y a 4 cercles tangents de même rayon.

Théorème de Pythagore dans EFG :

$$EF^2 = EG^2 + FG^2$$

$$EF^2 = (2r)^2 + (2r)^2$$

$$EF^2 = 8r^2 \text{ d'où } EF = 2 \times \sqrt{2}r.$$

C, E, F, D alignés dans cet ordre d'où  $CD = CE + EF + FD$ .

$$CD = r + 2 \times \sqrt{2}r + r \text{ d'où } CD = 2(1 + \sqrt{2})r.$$

**Avec le couvercle en carton :**

Aire carton boîte

$$= 2 \times \pi (1 + \sqrt{2})^2 r^2 + 2\pi (1 + \sqrt{2}) r \times 2r$$

$$= 2 \times \pi r^2 \left( (1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2}) \right)$$

$$= 2\pi r^2 (1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2\sqrt{2})$$

$$= 2\pi r^2 (5 + 4\sqrt{2})$$

**Avec le couvercle en plastique**

Aire carton boîte

$$= \pi (1 + \sqrt{2})^2 r^2 + 2\pi (1 + \sqrt{2}) r \times 2r$$

$$= \pi r^2 \left( (1 + \sqrt{2})^2 + 4(1 + \sqrt{2}) \right)$$

$$= \pi r^2 (1 + 2\sqrt{2} + 2 + 4 + 4\sqrt{2})$$

$$= \pi r^2 (7 + 6\sqrt{2})$$

**Comparaison avec les couvercles en carton :**

$$2\pi r^2 (5 + 4\sqrt{2}) - 18\pi r^2 = 2\pi r^2 (5 + 4\sqrt{2} - 9)$$

$$= 2\pi r^2 (4\sqrt{2} - 4)$$

$$= 8\pi r^2 (\sqrt{2} - 1) > 0 \text{ car } 2 > 1.$$

*Réponse :* La boîte du schéma n°1 nécessite le moins de carton.

**Comparaison avec les couvercles en plastique**

$$\pi r^2 (7 + 6\sqrt{2}) - 17\pi r^2 = \pi r^2 (7 + 6\sqrt{2} - 17)$$

$$= \pi r^2 (6\sqrt{2} - 10)$$

$$= 2\pi r^2 (3\sqrt{2} - 5) < 0 \text{ car } 18 < 25.$$

*Réponse :* La boîte du schéma n°2 nécessite le moins de carton.

## Exercice n° 3 (Séries L, ES, STI, STL, STG, SMS)

### Enoncé

#### Autour de pourcentages

Jimmy possède une camionnette pour transporter sa batterie d'un lieu de concert à un autre. Depuis plusieurs années, il a fait le choix de dépenser 100 € de carburant par mois, en une seule fois, ni plus, ni moins. On suppose que le prix du carburant ne varie pas au cours d'un même mois.

1. Les volumes d'essence qu'il achète mensuellement sont-ils proportionnels aux prix du litre d'essence ?
2. En septembre 2003, il payait un litre d'essence 1,04 € tandis qu'en septembre 2007 celui-ci s'élevait à 1,30 €.

Jimmy a-t-il raison de dire que le volume de carburant acheté en septembre

2007 a diminué de 20% par rapport au volume de carburant acheté en septembre 2003 ?

3. Un mois donné, le prix d'un litre d'essence est  $p$  ( $p$  est exprimé en euros). Les questions a) et b) sont indépendantes.

- a) On suppose que le mois suivant le prix du litre d'essence a augmenté de moins de 10%.

Jimmy a-t-il raison de dire que la diminution de volume de carburant acheté, qui en résulte, est inférieure à 10% ?

- b) On suppose que le mois suivant le prix du litre d'essence a diminué de moins de 10%. Jimmy a-t-il raison de dire que l'augmentation de volume de carburant acheté, qui en résulte, est inférieure à 10% ?

## Solution

1. Si  $p$  est le prix d'un litre de carburant, un mois donné, le volume de carburant acheté est :  $V = \frac{100}{p}$ .

Les volumes achetés sont donc **inversement proportionnels** aux prix d'un litre.

2. En septembre 2003, Jimmy a acheté un volume  $V = \frac{100}{1,04}$  et en septembre 2007,  $V' = \frac{100}{1,3}$ .

Le coefficient multiplicateur est  $\frac{V'}{V} = \frac{1,04}{1,3} = 0,8 = 1 - 20\%$ .

Le pourcentage de diminution de volume acheté est 20%. **Jimmy a raison.**

3. a) et b). Le prix du litre d'essence varie d'un mois au suivant de  $t\%$  avec  $t \in [-10 ; 10]$ .

Les volumes achetés sont respectivement :  $V = \frac{100}{p}$  et  $V' = \frac{100}{p \left(1 + \frac{t}{100}\right)}$ .

Le coefficient multiplicateur est  $\frac{V'}{V} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}} = \frac{100}{100 + t}$ .

La fonction rationnelle  $f \mapsto \frac{100}{100 + t}$  est strictement décroissante sur  $] -100 ; +\infty[$  donc sur l'intervalle  $[-10 ; 10]$  :  $f(-10) = \frac{10}{9} > 1,11$  ;  $f(0) = 1$  ;  $f(10) = \frac{10}{11} > 0,90$ .

Pour tout  $t \in [0 ; 10]$ ,  $\frac{10}{11} \leq \frac{V'}{V} \leq 1$  donc  $0,90 \leq \frac{V'}{V} \leq 1$  : la diminution de volume acheté est inférieure à 10%. **Jimmy a raison.**

Pour tout  $t \in [-10 ; 0]$ ,  $1 \leq \frac{V'}{V} \leq \frac{10}{9}$  mais pour  $t = -10$ ,  $\frac{V'}{V} > 1,11$  : l'augmentation de volume acheté est alors supérieure à 11%. **Jimmy a tort.**