

# CAEN

## Exercice n° 1 (Série S)

### Enoncé

#### Un problème de cylindre

Les 2 expériences décrites ci-dessous sont indépendantes.

1. A l'intérieur d'un cylindre rempli d'eau, on emboîte parfaitement 3 sphères de telle sorte que la hauteur de l'ensemble des 3 sphères soit égale à la hauteur du cylindre. Ce qui signifie que le rayon des sphères est le même que celui du cylindre. La quantité d'eau restant à l'intérieur du cylindre peut-elle être de 1 litre ?
2. A l'intérieur d'un cylindre rempli d'eau, on emboîte parfaitement une sphère puis un cône de révolution de même rayon que celui de cylindre de telle sorte que la hauteur de l'ensemble cône-sphère soit égale à la hauteur du cylindre. La quantité d'eau restant à l'intérieur du cylindre est de 1 litre.
  - a) Sachant que le rayon du cylindre est de 5 cm, calculer la hauteur du cylindre.
  - b) Sachant que la hauteur du cylindre est de 20 cm, déterminer le rayon du cylindre.

On pourra utiliser les formules suivantes :

**Volume du cylindre :**  $\pi R^2 h$

**Volume du cône de révolution :**  $\frac{1}{3} \pi R^2 h$

**Volume de la sphère :**  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .

### Solution

1. Soit  $h$  la hauteur du cylindre et  $r$  son rayon (exprimé en cm). D'où  $h = 6r$ .  
Le volume du cylindre est  $V_1 = \pi r^2 \times h = 6\pi r^3$ .  
Le volume d'une sphère est  $V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad V_1 &= 3V_2 + 1000 \\ 6\pi r^3 &= 4\pi r^3 + 1000 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } r^3 = \frac{1000}{2\pi} \text{ d'où } r \approx 5,4 \text{ cm.}$$

2. Soit  $V_3$  le volume du cône, la hauteur du cône est donc  $h - 2r$ .

$$\begin{aligned} \text{On obtient } V_1 &= V_2 + V_3 + 1000 \\ \pi r^2 h &= \frac{4}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2 \times (h - 2r) + 1000 \\ 3\pi r^2 h &= 4\pi r^3 + \pi r^2 h - 2\pi r^3 + 3000 \\ 2\pi r^2 h &= 2\pi r^3 + 3000. \end{aligned}$$

$$\text{a) } h = \frac{2\pi r^3 + 3000}{2\pi r^2}.$$

D'où, pour  $r = 5$  cm, on a  $h \approx 24,1$  cm.

b) pour  $h = 20$  cm

On obtient l'équation :  $2\pi r^3 - 40\pi r^2 + 3000 = 0$ .

En utilisant la calculatrice, on obtient 3 valeurs :

$$r_1 \approx -4,4, \quad r_2 \approx 5,8 \quad \text{et} \quad r_3 \approx 18,6.$$

Seul  $r_2$  est possible ( $0 < r < 10$ ).

## Exercice n° 2 (Série S)

### Enoncé

#### Problème des trois chèvres

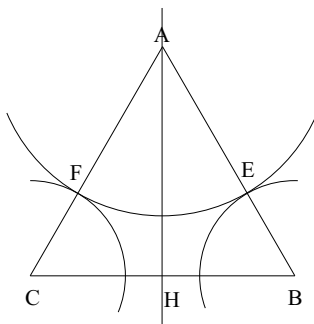
A chaque sommet d'un triangle équilatéral de 48 m de côté est attachée une chèvre à l'aide d'une corde. Les secteurs angulaires décrits par les chèvres, supposées ponctuelles, ne peuvent pas se croiser (au plus tangents).

1. Chaque chèvre a une corde de 24 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?
2. Une des trois chèvres a une corde de 32 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?
3. Aucune chèvre ne peut avoir une corde plus longue que la distance qui sépare son point d'attache au côté opposé. Déterminer la superficie maximale que les trois chèvres peuvent brouter.

## Solution

1. Soit  $r = 24$  m la longueur commune des cordes des trois chèvres. La superficie broutée par les chèvres est

$$S = 3 \times \frac{1}{6} \pi r^2 = 3 \times \frac{1}{6} \pi \times 24^2 = 288\pi \approx 904,78 \text{ m}^2.$$



2. Soit  $r = 32$  m la longueur de la corde d'une des chèvres. Les autres chèvres ont alors une corde de longueur  $r' = 48 - 32 = 16$  m. La superficie broutée par les chèvres est donc :

$$S = \frac{1}{6} \pi r^2 + 2 \times \frac{1}{6} \pi r'^2 = \frac{1}{6} \pi \times 32^2 + 2 \times \frac{1}{6} \pi \times 16^2 = \frac{768}{3} \pi \approx 804,25 \text{ m}^2.$$

Soit  $x$  (en m) la longueur de la corde attachée en A. Alors les cordes des deux autres chèvres, attachées en B et C sont de longueur  $48 - x$ .

Avec les conditions énoncées, on a :  $\frac{1}{2} \times 48 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \times 48$  car  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 48$  représente la distance  $AH$ , soit  $24 \leq x \leq 24\sqrt{3}$ .

La superficie broutée par les trois chèvres est alors

$$S(x) = \frac{1}{6} \pi x^2 + 2 \times \frac{1}{6} \pi (48 - x)^2 = \frac{1}{2} \pi (x^2 - 64x + 1536).$$

La dérivée de cette fonction est  $S'(x) = \pi(x - 32)$ .

Le tableau de variation de  $S(x)$  est

| $x$     | 24      | 32      | $24\sqrt{3}$    |
|---------|---------|---------|-----------------|
| $S'(x)$ | —       | 0       | +               |
| $S(x)$  | $S(24)$ | $S(32)$ | $S(24\sqrt{3})$ |

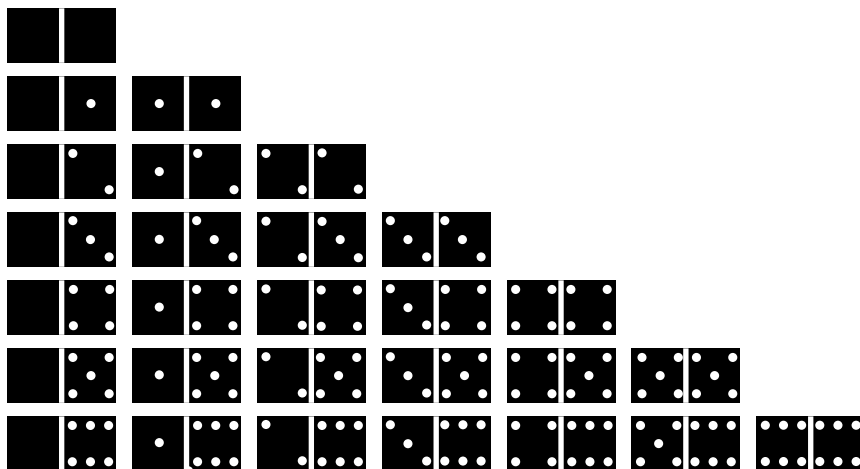
Le maximum est atteint pour  $S(24)$  ou  $S(24\sqrt{3})$ . Or  $S(24) \approx 904,78$  et  $S(24\sqrt{3}) \approx 948,09$  alors la superficie broutée est maximale si une des chèvres a une corde de  $24\sqrt{3} \approx 41,57$  m et la longueur des autres cordes est  $48 - 24\sqrt{3} \approx 6,43$  m.

## Exercice n° 3 (Séries autres que S)

### Enoncé

**Les dominos** (à rapprocher de Versailles Ex. 2)

Le jeu de dominos occidental est constitué des 28 pièces ci-dessous :



Un carré est *magique* si les sommes des nombres des rangées, des colonnes et des diagonales principales sont toutes égales à un même nombre que l'on appellera la *constante du carré*. Le *rang* d'un tel carré est son nombre de rangées (ou de colonnes).

On souhaite réaliser des carrés magiques avec ces pièces, sachant qu'une pièce utilisée ne pourra l'être qu'une seule fois.

1. Montrer qu'avec des dominos on ne peut réaliser que des carrés magiques de rang pair.
2. Peut-on réaliser un carré magique de rang 2 ?
3. Quel est le rang maximal que l'on peut espérer réaliser avec un seul jeu ?
4. a) Quelle est la constante minimale d'un carré de rang 4 ? Donner un exemple.  
b) En déduire la constante maximale d'un carré de rang 4 ainsi qu'un exemple.

### Solution

1. Chaque domino est constitué de deux cases. Donc le nombre de cases d'un carré magique est pair. Supposons que l'on puisse avoir un carré magique de rang impair (du type  $2n + 1$  avec  $n$  entier) alors il est constitué d'un nombre impair de cases ( $(2n + 1)^2$  est bien impair) ; d'où une contradiction.

2. Supposons que l'on puisse réaliser un carré magique d'ordre 2. Il est constitué de deux dominos du type :

|     |     |
|-----|-----|
| $x$ | $y$ |
| $z$ | $t$ |

tels que  $x + y = z + t = x + z = y + t = x + t = y + z$  d'où  $x = y = z = t$ , les deux dominos sont alors constitués des mêmes chiffres : ce sont les mêmes dominos. Ce qui est impossible.

3. Soit  $r$  le rang maximal que l'on peut espérer réaliser avec un seul jeu :  $r$  est pair par ce qui précède et vérifie  $r^2 \leq 56$ , où 56 est le nombre de cases contenues dans un jeu de 28 dominos. Donc  $r = 6$ .
4. a) Le nombre total des points sur les dominos d'un carré magique de rang 4 est divisible par 4, puisque, par exemple chacune des 4 lignes a un même total de points.

Or 20 est la plus petite des sommes multiples de 4 réalisable avec 8 dominos.  $20 : 4 = 5$  est la plus petite constante du carré que l'on peut espérer obtenir. Vérifions que l'on peut obtenir un tel carré :

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 | 3 |
| 3 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 3 | 1 |

- b) La constante maximale du carré est alors obtenue en considérant le complément à 6 de chaque case :

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 6 | 3 |
| 3 | 4 | 6 | 6 |
| 5 | 5 | 4 | 5 |
| 5 | 6 | 3 | 5 |

$6 + 4 + 6 + 3 = 19$  donc 19 est la constante du carré maximale.

## Exercice n° 4 (Séries autres que S)

### Enoncé

#### Les cyclistes

Sur une piste circulaire de longueur 400 m et de diamètre  $[AB]$ . Un cycliste part de A à une vitesse de 18 km / h et un autre part de B à une vitesse de 14,4 km / h (dans le même sens de circulation que le premier cycliste).

- a) Au bout de combien de temps le 1<sup>er</sup> cycliste va-t-il rattraper le 2<sup>ème</sup> cycliste pour la 1<sup>ère</sup> fois, et pour la 2<sup>ème</sup> fois ?
- b) Les 2 cyclistes restent une heure sur la piste. Combien de fois vont-ils se rencontrer ?

2. Le lendemain, à la même vitesse, le 2<sup>ème</sup> cycliste part dans le sens contraire de circulation que le 1<sup>er</sup> cycliste. Combien de fois vont-ils se rencontrer si ils restent 1 heure sur la piste ?

## Solution

On peut repérer sur le cercle la position d'un cycliste à un temps  $t$  (exprimé en heures) en prenant pour origine le point A.

1. Ainsi, la distance parcourue par le 1<sup>er</sup> cycliste en un temps  $t$  est  $x = 18\,000t$ , ce qui détermine sa position sur le cercle.

La distance parcourue par le 2<sup>ème</sup> cycliste en un temps  $t$  est  $14\,400t$ , mais le point B est à 200 m du point A, donc le 2<sup>ème</sup> cycliste sera à la position  $y = 14\,400t + 200$ .

- a) Lors de leur première rencontre,  $x = y$ ,

c'est-à-dire  $18\,000t = 14\,400t + 200$ , donc  $t = \frac{200}{3600}h$ , les deux cyclistes se rencontrent donc pour la première fois au bout de 200 secondes.

Pour leur deuxième rencontre,  $x = y + 400$  car le 1<sup>er</sup> cycliste a fait un tour de plus que le 2<sup>ème</sup>.

Il s'agit de résoudre l'équation  $18\,000t = 14\,400t + 200 + 400$ .

$$t = \frac{600}{3600}h = 600 \text{ secondes.}$$

- b) La vitesse des cyclistes étant constante, le 1<sup>er</sup> gagne un tour sur le 2<sup>ème</sup> toutes les 400 secondes : en  $1h = 3600$  s, il gagnera 9 tours, et les 2 cyclistes se rencontreront 9 fois.
2. En prenant le même repère d'origine A, orienté dans le sens de circulation du 1<sup>er</sup> cycliste, la position de chacun est donnée par :  $x = 18\,000t$  et  $y = 200 - 14\,400t$ .

Leur première rencontre aura lieu pour  $x = y$ , au bout de  $t = \frac{200}{32\,400}h \approx 22,2$  s.

Circulant en sens contraire, la somme des distances parcourue par les 2 cyclistes est de 400 mètres entre chacune de leur rencontre, parcourus en

$$\frac{400}{32\,400}h \approx 44,4 \text{ s.}$$

En une heure, ils vont donc se croiser  $\frac{1}{\frac{400}{32\,400}} = 81$  fois.

*Remarque* : On pourrait également dire que les coureurs sont séparés par  $n$  nombre de tours lorsque  $x = y + 400 \times n$ , c'est-à-dire :  $18\,000t = 200 - 14\,400t + 400n$ , soit  $32\,400t = 200 + 400n$ .

Lorsque le temps  $t$  varie entre 0 et  $1h$ , le nombre de tours  $n$  séparant les coureurs varie entre  $\frac{-200}{400} = -0,5$  et  $\frac{32\,200}{400} = 80,5$  : il y a 81 rencontres pour toutes les valeurs entières de  $n$  entre 0 et 80.