

# BORDEAUX

## Exercice n° 1 (Toutes séries)

### Enoncé

(A rapprocher de Corse - Ex 1)

$ABCD$  est un carré de côté  $a$ . Le cercle  $\Gamma_1$  est tangent aux segments  $[AD]$  et  $[DC]$ .

**1 a.** Reproduire la figure 1 et construire un cercle  $\Gamma_2$  contenu dans le carré  $ABCD$ , tangent à la fois au cercle  $\Gamma_1$  et aux segments  $[AB]$  et  $[BC]$ . On indiquera le programme de construction

**b.** Expliquer pourquoi cette construction n'est pas possible sur la figure 2

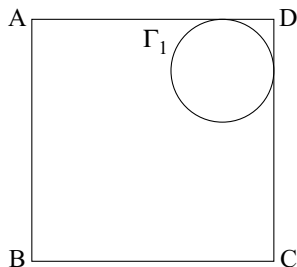


Figure 1

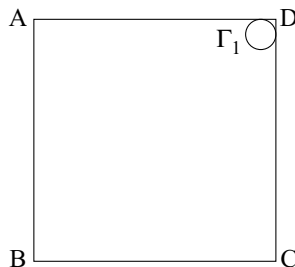


Figure 2

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que le cercle  $\Gamma_2$  est contenu dans le carré  $ABCD$  et tangent à la fois au cercle  $\Gamma_1$  et aux segments  $[AB]$  et  $[BC]$ . On désigne respectivement par  $R_1$  et  $R_2$  les rayons des cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

**2.a.** Démontrer que  $R_1 + R_2$  reste constant lorsque l'on fait varier la dimension des deux cercles.

**b.** Quelle est la valeur minimale et la valeur maximale de  $R_1$  ?

**3.** Soit  $S$  la somme des aires des disques limités par les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de  $S$ .

**4.** Le petit cercle représenté sur la figure ci-dessous est tangent au cercle  $\Gamma_1$  et aux côtés  $[AD]$  et  $[DC]$ .

Exprimer le rayon de ce cercle en fonction de  $R_1$ .



**Discussion :**

On a besoin du lemme suivant :

**Lemme :** *dans un triangle rectangle isocèle, la mesure  $r$  du rayon du cercle inscrit est donnée par  $r = \frac{\ell}{2 + \sqrt{2}}$  où  $\ell$  désigne la mesure commune des côtés de l'angle droit.*

**Preuve du lemme.**

On a  $r = \frac{S}{p}$  où  $S$  est l'aire du triangle et  $p$  son demi-périmètre ; dans notre cas,  $S = \frac{\ell^2}{2}$  et  $2p = \ell + \ell + \ell\sqrt{2} = \ell(2 + \sqrt{2})$ , donc

$$r = \frac{\ell^2}{2} \times \frac{2}{\ell(2 + \sqrt{2})} = \frac{\ell}{2 + \sqrt{2}}.$$

Désignons par  $b$  la mesure du côté de l'angle droit du triangle rectangle isocèle FDG. On a  $BH = BC + CH = BC + CG = a + a - b = 2a - b$ .

Par application du lemme dans les deux triangles rectangles isocèles FDG et BEH, on a :

$$R_1 = \frac{b}{2 + \sqrt{2}} \text{ et } R_2 = \frac{2a - b}{2 + \sqrt{2}}, \text{ donc } R_2 = \frac{2a - R_1(2 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2a}{2 + \sqrt{2}} - R_1.$$

Pour que le problème admette une solution, il faut et il suffit que  $R_2 \leq \frac{a}{2}$ ,

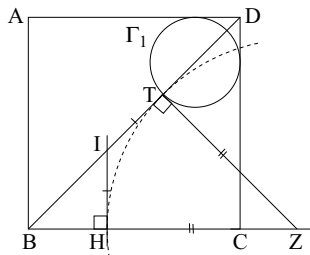
ce qui se traduit par l'inégalité :  $\frac{2a}{2 + \sqrt{2}} - R_1 \leq \frac{a}{2}$ , qui est équivalente à

$$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} a \leq R_1.$$

**Troisième construction :**

Par le point T traçons la perpendiculaire à la diagonale du carré qui coupe la demi-droite  $[BC)$  au point Z, ensuite le cercle de rayon  $ZT$  qui coupe le segment  $[BC]$  au point H (entre B et C) et la perpendiculaire menée par le point H à la droite  $(BC)$  qui coupe la diagonale du carré en I.

Le point I est le centre du cercle voulu. En effet les droites  $(IT)$  et  $(IH)$  sont les deux tangentes au cercle de centre Z et de rayon  $ZT$  issues du point I, donc  $IT = IH$ . Ce qui justifie notre affirmation.



**Remarque.** Cette construction n'est qu'un déguisement de la construction de l'intersection d'une droite avec une parabole, puisque le lieu de  $I$  est un morceau de parabole de foyer  $T$  et de directrice la droite  $(BC)$ ...

b) Le cercle  $\Gamma_2$  n'est pas à l'intérieur du carré  $ABCD$  (voir la discussion de la **deuxième construction**).

2.a) On a  $BD = R_1\sqrt{2} + R_1 + R_2 + R_2\sqrt{2}$ , et comme  $BD = a\sqrt{2}$ , alors  $R_1 + R_2 = a(2 - \sqrt{2})$ .

b) La valeur maximale de  $R_1$  est  $\frac{a}{2}$ ,

la valeur minimale de  $R_1$  est  $a(2 - \sqrt{2}) - \frac{a}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}a$ .

3. On a

$$S = \pi(R_1^2 + R_2^2)$$

$$= \frac{\pi}{2} [(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - R_2)^2] \geq \frac{\pi}{2} (R_1 + R_2)^2 = \frac{\pi a^2 (2 - \sqrt{2})^2}{2},$$

ainsi la valeur minimale de  $S$  est  $\frac{\pi a^2 (2 - \sqrt{2})^2}{2}$ . Elle est atteinte si et seule-

ment si  $R_1 = R_2 = a \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ , donc lorsque  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les cercles inscrits respectivement des triangles  $ADC$  et  $ABC$ .

$S$  est maximale si et seulement si  $(R_1 - R_2)^2$  l'est ;

• d'après 2.a), on a  $(R_1 - R_2)^2 = (2R_1 - a(2 - \sqrt{2}))^2$ ,

• d'après 2.b),  $R_1$  varie dans l'intervalle  $\left[\frac{a}{2}, \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}a\right]$ , et on vérifie bien

que le maximum de l'expression  $(2R_1 - a(2 - \sqrt{2}))^2$  est atteint pour  $R_1 = \frac{a}{2}$ ,

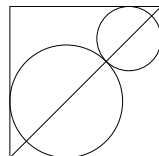
donc  $R_2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}a$ .

4. Soit  $x$  le rayon du petit cercle. Par application du résultat de la question 2.a) au carré circonscrit au cercle  $\Gamma_1$  et dont un côté est porté sur le segment  $[DA]$ , on obtient  $x + R_1 = 2R_1(2 - \sqrt{2})$ , donc  $x = R_1(3 - 2\sqrt{2})$ .

### Commentaires (A.O.)

Dans la construction de ce problème, je me suis inspiré du problème n° 22 de l'épreuve **junior du Kangourou des mathématiques 2007**. En voici l'énoncé.

Deux cercles ont leur centre sur la même diagonale d'un carré de côté 1. Ils sont tangents entre eux et tangents à deux côtés du carré, comme le montre la figure ci-contre. Combien vaut la somme des rayons des deux cercles ?



## Une généralisation du résultat 2.a) du problème(A.O.)

### Proposition (à la mémoire de Henri Bareil)

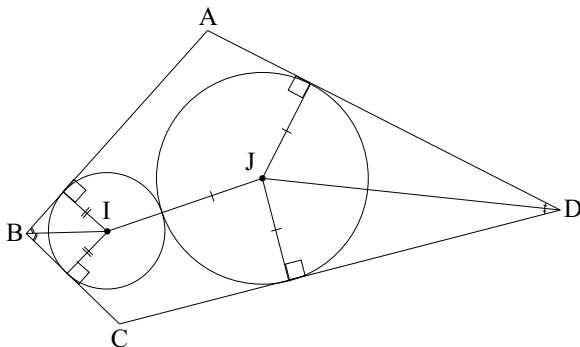
- Dans un quadrilatère convexe ABCD, on suppose qu'il existe deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  tels que :
  - (i) Le cercle  $C_1$  est tangent aux côtés  $[AB]$  et  $[BC]$ .
  - (ii) Le cercle  $C_2$  est tangent à la fois au cercle  $C_1$  et aux côtés  $[AD]$  et  $[CD]$ .
 On a l'inégalité suivante :

$$R_1 \left( 1 + \left( \sin \frac{\widehat{B}}{2} \right)^{-1} \right) + R_2 \left( 1 + \left( \sin \frac{\widehat{D}}{2} \right)^{-1} \right) \geqslant BD,$$

et l'égalité a lieu si et seulement si la droite  $(BD)$  est un axe de symétrie du quadrilatère ABCD.

- Il existe des quadrilatères pour lesquels il n'existe aucun couple de cercle  $C_1$  et  $C_2$  vérifiant les conditions (i) et (ii).

### Preuve de la proposition



- Désignons par I et J les centres respectifs des cercles  $C_1$  et  $C_2$  ; par l'inégalité triangulaire, on a :  $BI + IJ + JD \geqslant BD$ , et pour conclure, il suffit de remarquer que

$$BI = R_1 \left( \sin \frac{\widehat{B}}{2} \right)^{-1}, \quad DJ = R_2 \left( \sin \frac{\widehat{D}}{2} \right)^{-1}$$

et  $IJ = R_1 + R_2$  (condition de tangence des deux cercles).

On a l'égalité si et seulement si les points B, I, J et D sont alignés, ou encore  $(BD)$  est un axe de symétrie du quadrilatère ABCD.

- Prenons un rectangle ABCD de longueur et de largeur respective  $L$  et  $\ell$  avec  $L > 2\ell$ .  
Le rectangle ABCD répond à la question. En effet les plus grands cercles

qu'on peut tracer à l'intérieur de ce rectangle (chacun est tangent aux trois côtés consécutifs du rectangle) ont pour diamètre  $\ell$ , la distance entre leurs centres est  $IJ = L - \ell$ , de plus la somme de leurs rayons est  $\ell$ , et comme  $IJ = L - \ell > 2\ell - \ell = \ell$ , alors ces deux cercles ne se coupent pas.

## Solution (P.L.H.)

1.a) Supposons la figure construite : le point de contact  $P$  des cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est centre d'une homothétie qui transforme  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$ , la droite  $(DC)$  en la droite  $(AB)$  et la droite  $(AD)$  en la droite  $(BC)$ . L'image  $Q_2$  du point de contact  $Q_1$  de  $(AD)$  et  $\Gamma_1$  est donc le point de contact de  $(BC)$  et  $\Gamma_2$  et de même l'image  $P_2$  du point de contact  $P_1$  de  $(CD)$  et  $\Gamma_1$  est le point de contact de  $(AB)$  et  $\Gamma_2$ .

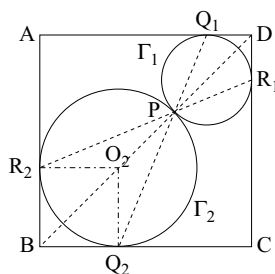


Figure 1

D'où le programme de construction :

$P$  point d'intersection de  $\Gamma_1$  et de  $(BD)$  le plus éloigné de  $D$ , puis  $Q_2$  (ou  $P_2$ ), puis  $O_2$  centre de  $\Gamma_2$ , intersection de  $(BD)$  et de la parallèle à  $(AB)$  passant par  $Q_2$  (ou de la parallèle à  $(BC)$  passant par  $P_2$ ).

1.b) Mais le cercle  $\Gamma_2$  doit être contenu dans le carré  $ABCD$ , ce qui implique que

$$BQ_2 = BP_2 \leq \frac{a}{2},$$

condition qui n'est pas satisfaite par la figure 2.

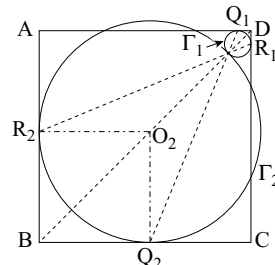


Figure 2

2.a) On a  $PD = R_1(\sqrt{2} + 1)$  et  $BP = R_2(\sqrt{2} + 1)$  avec  $BD = a\sqrt{2}$ .

D'où  $R_1(\sqrt{2} + 1) + R_2(\sqrt{2} + 1) = a\sqrt{2}$

ou  $R_1 + R_2 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = a(2 - \sqrt{2})$ .

2.b) Mais  $0 \leq R_2 \leq \frac{a}{2}$  implique  $R_1 \geq a \left( 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) = a \left( \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right)$  et par construction  $R_1 \leq \frac{a}{2}$  et ces bornes sont atteintes.

3.  $S = \pi (R_1^2 + R_2^2) = \frac{\pi}{2} [(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - R_2)^2]$

avec  $R_1 - R_2 = 2R_1 - (R_1 + R_2) = 2R_1 - a(2 - \sqrt{2})$

d'où

$a(1 - \sqrt{2}) = 2a \left( \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) - a(2 - \sqrt{2}) \leq R_1 - R_2 \leq a - a(2 - \sqrt{2}) = a(\sqrt{2} - 1)$

ou  $|R_1 - R_2| \leq a(\sqrt{2} - 1)$  les bornes étant atteintes, puis

$$0 \leq (R_1 - R_2)^2 \leq a^2(\sqrt{2} - 1)^2 = a^2(3 - 2\sqrt{2})$$

et

$$\begin{aligned} \pi a^2(3 - 2\sqrt{2}) &= \frac{\pi a^2}{2}(2 - \sqrt{2})^2 \leq S \leq \frac{\pi a^2}{2} [(2 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2] \\ &= \frac{3\pi a^2}{2} (3 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

4. Soit  $R_3$  le rayon du petit cercle ; le découpage du segment  $[BD]$  donne  $R_3(1 + \sqrt{2}) + 2R_1 + R_2(1 + \sqrt{2}) = a\sqrt{2}$  ou  $R_3(1 + \sqrt{2}) = R_1(\sqrt{2} - 1)$  et  $R_3 = R_1(\sqrt{2} - 1)^2 = R_1(3 - 2\sqrt{2})$ .

## Exercice n° 2 (Toutes séries)

### Enoncé

On appelle  $\mathbb{E}$  l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme différence des carrés de deux entiers naturels.

1. Montrer que 2008 est élément de  $\mathbb{E}$  (on pourra chercher deux entiers  $a$  et  $b$ , tous deux supérieurs à 200 tels que  $2008 = a^2 - b^2$ ).
2. Montrer que tout nombre impair appartient à  $\mathbb{E}$ .
3. Montrer que  $\mathbb{E}$  contient tous les cubes des entiers naturels.
4. Décrire les entiers naturels qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $\mathbb{E}$ .
5. Donner un entier qui s'écrit comme différence des carrés de deux entiers naturels de cinq façons différentes exactement.

### Solution (A.O.)

1. L'entier 2008 admet la décomposition en facteurs premiers  $2008 = 2^3 \times 251$ . Remarquons que les entiers  $a - b$  et  $a + b$  sont de même parité, donc l'équation dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $2008 = a^2 - b^2$  est équivalent aux deux systèmes :

$$S_1 \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 2^2 \times 251 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} a - b = 2^2 \\ a + b = 2 \times 251 \end{cases}$$

qui admettent respectivement pour solutions

$$a = \frac{2^2 \times 251 + 2}{2} = 2 \times 251 + 1 = 503, \quad b = \frac{2^2 \times 251 - 2}{2} = 2 \times 251 - 1 = 501$$

$$S_1 = \{(503, 501)\}$$

$$a = \frac{2 \times 251 + 2^2}{2} = 251 + 2 = 253, \quad b = \frac{2 \times 251 - 2^2}{2} = 251 - 2 = 249$$

$$S_2 = \{(253, 249)\}$$

Donc on a  $2008 = 503^2 - 501^2 = 253^2 - 249^2$  et ce sont les seules écritures de 2008 comme différence de deux entiers naturels.

2. Il suffit de résoudre dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  le système  $\begin{cases} x - y = n \\ x + y = n^2 \end{cases}$

la résolution donne  $(x, y) = \left( \frac{n^2 + n}{2}, \frac{n^2 - n}{2} \right)$ , donc on peut écrire :

$$n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \left( \frac{n(n-1)}{2} \right)^2.$$

3. Solution de l'élève Rémi Olivier Patin.

*Premier cas* :  $n$  est impair.

$n^2$  aussi est impair, donc  $n^3$  appartient à  $E$ .

*Deuxième cas* :  $n$  est pair.  $n$  est de la forme  $2p$  avec  $p$  un entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} n^3 &= (2p)^3 = 8p^3 = 4p^3 + 4p^3 - 1 + 1 + 4p^6 - 4p^6 \\ &= 4p^3 + 4p^6 + 1 - (-4p^3 + 4p^6 + 1) \\ &= (2p^3 + 1)^2 - (2p^3 - 1)^2 \end{aligned}$$

donc  $n^3$  appartient à  $E$ .

4. D'après la question précédente, tous les nombres impairs appartiennent à  $E$ . Intéressons-nous aux nombres pairs. Soit  $n$  un entier naturel non nul ; deux cas se présentent :

- Si  $n$  est divisible par 4,  $n = 4k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $n$  appartient à  $E$  puisque  $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$ .
- Si  $n$  n'a que 2 comme diviseur pair,  $n = 2(2u+1)$  ( $u \in \mathbb{N}$ ),  $n$  n'appartient pas à  $E$ . En effet si  $(x, y)$  est une solution de l'équation  $x^2 - y^2 = 2(2u+1)$ , alors les nombres  $x+y$  et  $x-y$  ne sont pas de même parité, ce qui est impossible puisque leur somme  $(x+y) + (x-y) = 2x$  est un nombre pair.

**Conclusion.** L'ensemble  $E$  est formé par tous les entiers naturels impairs et les entiers naturels divisibles par 4.

5. Le nombre  $3^8 = 6\,561$  répond à la question (voir la proposition suivante).

## Prolongements (A.O.)

**Proposition** (à la mémoire d'Henri Bareil)

- (i) Pour tout couple d'entiers naturels  $(n, k)$ , ( $k \geq 1$ ) l'entier  $n^{2k+1}$  appartient à  $E$ .
- (ii) Si  $a \in E$ ,  $b \in E$ , alors  $ab \in E$ .
- (iii) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , il existe une infinité d'entiers naturels qui s'écrivent exactement comme la différence des carrés de deux entiers naturels de  $n$  façons différentes exactement.
- (iv) un entier naturel au moins égal à 3 est la différence des carrés de deux entiers naturels d'une seule façon si et seulement si c'est un nombre premier ou de la forme  $4p$  où  $p$  est un nombre premier.

**Preuve de la proposition.**

(i) Il suffit de résoudre dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  le système

$$\begin{cases} x - y = n \\ x + y = n^{2k} \end{cases}$$

qui admet pour solution  $(x, y) = \left( \frac{n^{2k} + n}{2}, \frac{n^{2k} - n}{2} \right)$  ( $n^{2k}$  et  $n$  sont de même parité).

(ii) Il suffit d'utiliser l'identité de Brahmagupta pour  $a, b, c, d, k$  entiers naturels :

$$(a^2 - kb^2)(c^2 - kd^2) = (ac + kbd)^2 - k(ad + bc)^2,$$

pour  $k = 1$ .

(iii) Pour  $n \geq 2$ , il suffit de considérer les nombres  $p^{2n-2}$  où  $p$  est un nombre premier ( $p \geq 3$ ). En effet, l'équation  $x^2 - y^2 = p^{2n-2}$ , ( $x$  et  $y$  sont des entiers naturels) est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} x - y = p^a \\ x + y = p^b \\ a + b = 2n - 2 \\ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{cases}$$

Remarquons que  $a \leq b$ , donc  $2a \leq a + b = 2(n - 1)$ , ainsi  $0 \leq a \leq n - 1$ . Donc

$$(a, b) \in \{(0, 2n - 2), (1, 2n - 3), (2, 2n - 4), \dots, (n - 1, n - 1)\}$$

ce qui montre que le système ci-dessus admet exactement  $n$  solutions.

Pour  $n = 1$ , tous les nombres premiers supérieurs ou égaux à 3 répondent à la question (voir (iv)).

(iv) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3.

- Si  $n$  est premier, c'est un nombre impair, donc il appartient à  $\mathbb{E}$ , d'après le résultat de l'exercice d'Olympiades). De plus l'équation  $x^2 - y^2 = n$  est équivalente au système

$$\begin{cases} x + y = n \\ x - y = 1 \end{cases}$$

qui admet une et une seule solution dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  à savoir  $(x, y) = \left( \frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2} \right)$ .

- Si  $n$  est de la forme  $n = 4p$ , où  $p$  est un nombre premier, l'équation  $x^2 - y^2 = 4p$  est équivalente aux deux systèmes :

$$S_1 \begin{cases} x + y = 2p \\ x - y = 2 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} x + y = p \\ x - y = 4 \end{cases}$$

le système  $S_2$  entraîne les deux conditions  $4 \leq p$  et  $4+p$  est pair, donc  $p = 2$ , contradiction ; ce qui exclut le système  $S_2$ , donc notre équation admet une solution unique dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , à savoir  $(x, y) = (p+1, p-1)$ .

Réciproquement, soit  $n \in \mathbb{E}$  ( $n \geq 3$ ) qui s'écrit d'une seule façon comme la différence des carrés de deux entiers naturels. Raisonnons par l'absurde en supposant que  $n$  n'est pas premier et n'est pas de la forme  $n = 4p$  où  $p$  est un nombre premier. Deux cas se présentent.

*Premier cas :  $n$  est impair.*

On a  $n = uv$ , où  $u$  et  $v$  sont des entiers impairs ( $u \geq v \geq 3$ ) ; dans ce cas, on a deux décompositions :

$$n = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Elles sont distinctes. En effet dans le cas contraire, on aurait :

$$\begin{cases} u+v = n+1 \\ u-v = n-1 \end{cases}$$

donc  $u = n$  et  $v = 1$ , ce qui est impossible.

*Deuxième cas :  $n$  est pair.*

D'après le résultat de l'exercice d'Olympiades,  $n = 4k$ , et  $k$  ne peut pas être un nombre premier (hypothèse faite sur  $n$ ), donc il s'écrit sous la forme  $k = ab$ , ( $a$  et  $b$  sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2) donc l'écriture  $n = (2a)(2b) = 2(2ab)$  nous fournit deux décompositions :

$$n = (a+b)^2 - (a-b)^2 = (ab+1)^2 - (ab-1)^2.$$

Elles sont distinctes. En effet, dans le cas contraire, on aurait :

$$\begin{cases} a+b = ab+1 \\ a-b = ab-1 \end{cases}$$

pour aboutir à une contradiction.

Considérons par exemple la deuxième relation du système :  $a-b = ab-1$  qui est équivalente à  $(a+1)(b-1) = 0$ , donc  $b = 1$ , ce qui est absurde. Ceci achève notre preuve.

## Solution (P.L.H.)

1.  $2008 = 502 \times 4 = (253 + 249)(253 - 249) = 253^2 - 249^2$   
ou  $2008 = 1004 \times 2 = (503 + 501)(503 - 501) = 503^2 - 501^2$ .

2. Quelque soit l'entier  $p$  on a

$$\begin{aligned} 2p+1 &= (p+(p+1))((p+1)-p) \\ &= (p+1)^2 - p^2 \end{aligned}$$

donc  $2p+1$  appartient à  $\mathbb{E}$ .

3. Quelque soit l'entier  $p$  cherchons  $u$  et  $v$  tels que

$$p^3 = u^2 - v^2 = (u + v)(u - v).$$

On peut choisir  $u + v = p^2$  et  $u - v = p$  ou  $u = \frac{p(p+1)}{2}$  et  $v = \frac{p(p-1)}{2}$  ;  
 $u$  et  $v$  sont bien des entiers naturels car  $p(p+1)$  et  $p(p-1)$  sont pairs.

On a donc l'identité

$$p^3 = \left( \frac{p(p+1)}{2} \right)^2 - \left( \frac{p(p-1)}{2} \right)^2$$

qui montre que  $\mathbb{E}$  contient tous les cubes des entiers naturels.

4. Soit  $p = 2q$  un naturel pair. Si  $p$  appartient à  $\mathbb{E}$ , il existe  $u$  et  $v$  naturels tels que  $2q = u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ .

L'un des deux nombres  $u - v$  ou  $u + v$  est pair, mais comme leur différence (ou leur somme) est paire, ils sont pairs tous les deux et leur produit est divisible par 4. Donc  $q$  est pair et  $p$  multiple de 4.

Réciproquement tout multiple de 4 est dans  $\mathbb{E}$  car il peut s'écrire  $4s$  avec  $s$  naturel, et si l'on pose  $u = s + 1$  et  $v = s - 1$

$$4s = (s + 1)^2 - (s - 1)^2 = u^2 - v^2.$$

Les entiers naturels qui ne sont pas dans  $\mathbb{E}$  sont donc les produits de 2 par un nombre impair.

5. Partons de l'identité  $(2^p + 2^q)^2 - (2^p - 2^q)^2 = 2^{p+q+2}$ . On en déduit les cinq décompositions suivantes de  $2^{11} = 2048$  :

$$\begin{aligned} 2048 &= (512 + 1)^2 - (512 - 1)^2 = 513^2 - 511^2 \\ &= (256 + 2)^2 - (256 - 2)^2 = 258^2 - 254^2 \\ &= (128 + 4)^2 - (128 - 4)^2 = 132^2 - 124^2 \\ &= ((64 + 8)^2 - (64 - 8)^2) = 72^2 - 56^2 \\ &= (32 + 16)^2 - (32 - 16)^2 = 48^2 - 16^2 \end{aligned}$$

et ce sont bien les seules car si  $2^{11} = u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ , avec  $0 \leq v \leq u$ , il existe un unique naturel  $n$  compris entre 1 et 11 tel que  $u + v = 2^n$  et  $u - v = 2^{11-n}$ .