

# AMIENS

## Exercice n° 1 (Série S)

### Enoncé

Dans un tableau

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| <b>1</b> | <b>3</b> | <b>1</b> |
| <b>3</b> | <b>5</b> | <b>6</b> |
| <b>2</b> | <b>4</b> | <b>4</b> |

1. On peut modifier le tableau à l'aide des opérations suivantes :

- multiplier tous les nombres d'une ligne par 2,
- soustraire 1 à tous les nombres d'une colonne.

Montrer qu'en appliquant ces opérations, on peut obtenir un tableau dont tous les nombres sont nuls.

2. Montrer qu'on peut obtenir le même résultat à partir de tout tableau de 3 lignes et 3 colonnes ne contenant que des entiers strictement positifs.

(On pourra numéroté les lignes  $L_1, L_2, L_3$  et les colonnes  $C_1, C_2, C_3$ ).

### Solution (P.L.H.)

Notons, pour  $i$  compris entre 1 et 3,  $\ell_i$  l'opération qui multiplie par 2 les nombres de la ligne  $i$  et, pour  $j$  compris entre 1 et 3,  $C_j$  celle qui soustrait 1 à tous les nombres de la colonne  $j$ ;  $\ell_i^p$  et  $C_j^p$  leurs puissances  $p^{\text{ièmes}}$ .

Remarquons qu'une colonne de 0 est invariante par les transformations  $\ell_i$ .

1. Pour passer du tableau donné au tableau dont toutes les colonnes sont nulles, on peut, par exemple, effectuer la suite d'opérations :

|   |   |   |                        |   |   |   |                     |   |   |   |                                      |   |    |   |                       |
|---|---|---|------------------------|---|---|---|---------------------|---|---|---|--------------------------------------|---|----|---|-----------------------|
| 1 | 3 | 1 | $\xrightarrow{\ell_1}$ | 2 | 6 | 2 | $\xrightarrow{C_1}$ | 1 | 6 | 2 | $\xrightarrow{\ell_1 \times \ell_3}$ | 2 | 12 | 4 | $\xrightarrow{C_1^2}$ |
| 3 | 5 | 6 |                        | 3 | 5 | 6 |                     | 2 | 5 | 6 |                                      | 2 | 5  | 6 |                       |
| 2 | 4 | 4 |                        | 2 | 4 | 4 |                     | 1 | 4 | 4 |                                      | 2 | 8  | 8 |                       |

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 12 & 4 \\ \hline 0 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 8 & 8 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C_2^4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 8 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\ell_2^3 \times \ell_3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 8 & 4 \\ \hline 0 & 8 & 48 \\ \hline 0 & 8 & 16 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C_2^8} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 48 \\ \hline 0 & 0 & 16 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\ell_1^2} \\
\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 16 \\ \hline 0 & 0 & 48 \\ \hline 0 & 0 & 16 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C_3^{15}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 33 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\ell_2^5 \times \ell_3^5} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 32 \\ \hline 0 & 0 & 33 \\ \hline 0 & 0 & 32 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C_3^{31}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\
\xrightarrow{\ell_1 \times \ell_3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C_3^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

2. Partons d'une première colonne  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  avec  $a \geq b \geq c$ , ce qui est toujours possible éventuellement en renumérotant les lignes,

en appliquant  $C_1^{c-1}$  cette colonne devient

$$\begin{bmatrix} a - c + 1 \\ b - c + 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$b' = b - c + 1$  est compris entre deux puissances de 2 :  $2^k \leq b' < 2^{k+1}$ .

Appliquons  $\ell_3^k$  : la première colonne devient

$$\begin{bmatrix} a - c + 1 \\ b - c + 1 \\ 2^k \end{bmatrix}$$

Appliquons  $C_1^{2^k} - 1$ , elle devient

$$\begin{bmatrix} a - c + 1 - 2^k + 1 \\ b' - 2^k + 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et les deux premiers termes sont bien  $\geq 1$ .

Posons  $b'' = b' - 2^k + 1$ . On a  $1 \leq b'' < 2^k + 1$  donc  $b'' \leq 2^k$ .

- Supposons  $b'' = 2^k$ , en appliquant  $\ell_2^k \times \ell_3^k$ , on obtient  $\begin{bmatrix} a' \\ 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$ , puis en

appliquant  $C_1^{2^k-1}$ ,  $\begin{bmatrix} a'' \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

- Si  $b'' < 2^k$  on l'encadre par  $2^\ell \leq b'' < 2^{\ell+1}$  et on recommence jusqu'à

obtenir une colonne de la forme  $\begin{bmatrix} a'' \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

En appliquant le même processus à  $a''$ , on obtient  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  puis  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  en appliquant

$C_1$ .

On travaille de même sur la deuxième colonne en utilisant  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$  et  $C_2$  puis sur la troisième en utilisant  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$  et  $C_3$ .

## Exercice n° 2 (Série S)

### Enoncé

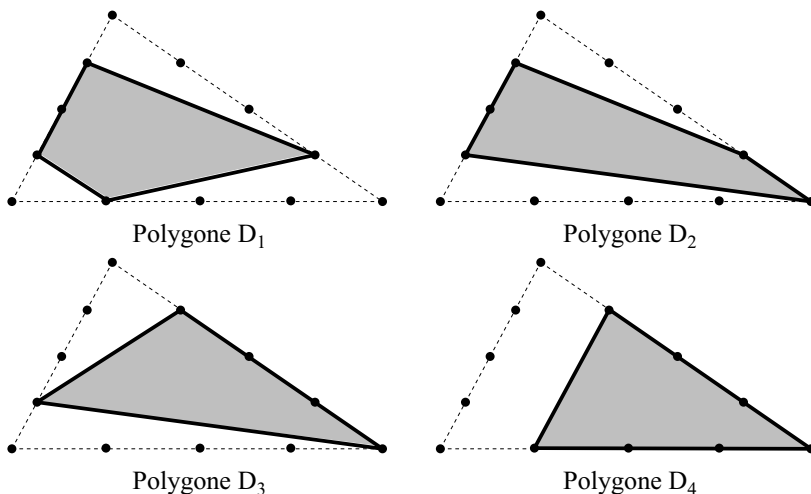
#### Triangles et polygones (à rapprocher de Créteil - Ex.2)

1. Question préliminaire : Soit deux triangles MNP et MNP' tels que  $(PP')$  soit parallèle à  $(MN)$ . Démontrer que ces deux triangles ont la même aire.

2. Chaque côté d'un triangle T est partagé en 4 segments de longueur égale. On construit des polygones  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  comme indiqué sur la figure. Voici quatre « photos » de ce triangle (en pointillés) et des polygones  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$ .

a) Montrer de proche en proche que  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  puis  $D_4$  ont des aires égales.

b) En déduire le rapport :  $\frac{\text{aire}(D_1)}{\text{aire}(T)}$



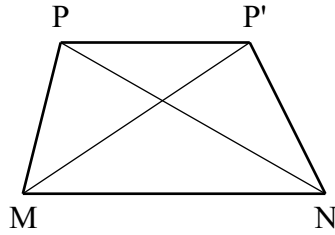
### Solution (P.L.H.)

Il me semble que cet exercice aurait plus sa place dans un rallye Collège–Lycée, voire CM2–6<sup>ème</sup>. Il est en effet immédiat si on utilise le lemme suivant :

Si ABC est un triangle et si P et Q sont choisis parmi les points (en gras sur la figure) qui divisent  $[AB]$  et  $[AC]$  en quarts, alors l'aire de APQ est égale au produit de l'aire de ABC par  $\frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}$ .

L'énoncé imposait une démonstration plus délicate, analysant les figures successives.

1.



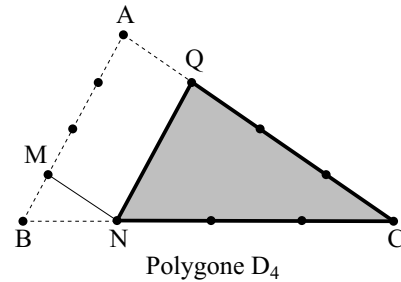
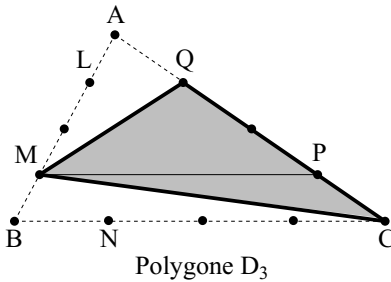
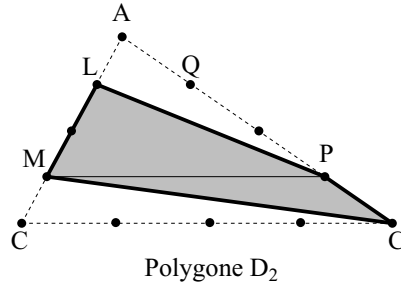
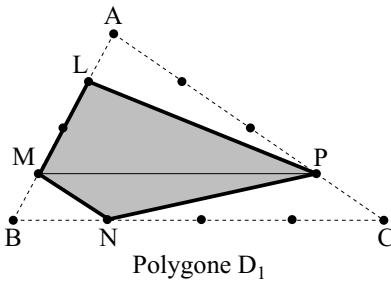
Le parallélisme de  $(MN)$  et de  $(PP')$  implique que les triangles  $MNP$  et  $MNP'$  ont même hauteur ; comme ils ont même base, ils ont même aire.

2.

a)  $D_1$  est la réunion des triangles  $MPL$  et  $MPN$  et  $D_2$  des triangles  $MPL$  et  $MPC$ .  $(NC)$  étant parallèle à  $(MP)$ ,  $MPN$  et  $MPC$  ont même aire d'après 1., donc aussi  $D_1$  et  $D_2$ .

$D_3$  est réunion de  $MPQ$  et  $MPC$  ;  $(QL)$  étant parallèle à  $(MP)$ ,  $MPL$  et  $MPQ$  ont même aire et donc aussi  $D_3$  et  $D_2$ .

$(MN)$  étant parallèle à  $(QC)$ , les deux triangles  $QCN$  et  $QCM$  ont même aire, donc aussi  $D_3$  et  $D_4$ .



b) Par Thalès :  $\frac{\text{aire}(D_4)}{\text{aire}(T)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ . On a donc  $\frac{\text{aire}(D_1)}{\text{aire}(T)} = \frac{9}{16}$ .

*Remarque :* ce sujet est à rapprocher de l'exercice 2 (Encore un peu d'aire) de Créteil.

## Exercice n° 3 (Séries STI-STL)

### Enoncé

**Dans un verre** (à rapprocher de Besançon - Ex. 1)

Dans un verre conique, on verse successivement du mercure (densité 13,59), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915). Les trois liquides remplissent le verre sans se mélanger et forment trois couches d'épaisseur.

Le verre contient-il alors une masse plus importante de mercure, d'eau ou d'huile ?

### Solution (P.L.H.)

Soit  $h$  l'épaisseur commune aux trois couches et  $S$  l'aire du bord supérieur du verre.

Les trois volumes sont, de bas en haut

$$\begin{aligned} \text{Mercure : } & \frac{1}{3} \times \frac{S}{9} \times h = \frac{Sh}{27} \\ \text{eau : } & \frac{1}{3} \times \left[ \frac{4S}{9} \times 2h - \frac{Sh}{9} \right] = \frac{75h}{27} \\ \text{huile : } & \frac{1}{3} \left[ 3Sh - \frac{8Sh}{9} \right] = \frac{19Sh}{27}. \end{aligned}$$

Et les masses correspondantes :

$$\begin{aligned} \text{Mercure : } & \frac{Sh \times 13,59}{27} = \frac{Sh}{27} \times 13,59, \\ \text{eau : } & \frac{Sh}{27} \times 7, \\ \text{huile : } & \frac{Sh}{27} \times 19 \times 0,915 = \frac{Sh}{27} \times 17,385. \end{aligned}$$

La masse de l'huile l'emporte donc sur celle du mercure qui l'emporte sur celle de l'eau.

## Exercice n° 4 (Séries STI-STL)

### Enoncé

1. Démontrer que pour tous réels  $u$  et  $v$  :  $u^2 + v^2 \geq 2uv$ .
2. En déduire que, quels que soient les réels  $a, b$  et  $c$  :

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

3. Déterminer alors le plus petit entier  $k$  tel que, quels que soient les nombres réels  $a, b$  et  $c$  :

$$(a + b + c)^2 \leq k(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Solution (P.L.H.)**

1.  $0 \leq (u - v)^2 \leq u^2 - 2uv + v^2$  ou  $2uv \leq u^2 + v^2$ .
2.  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + 2ab + 2bc + 2ca$   
 $\leq a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2$   
 $= 3(a^2 + b^2 + c^2)$ .
3. On a, par 2.,  $k \leq 3$ .  
 Si l'on fait  $a = b = c = 1$ , on en déduit  $9 \leq 3k$ .  
 D'où  $k \geq 3$  et finalement  $k = 3$ .

**Exercice n° 5 (Séries ES-L-STG)****Enoncé****Caramels**

Devant un bocal de caramels, Pascal se dit :

« Pour être sûr d'avoir :

- Deux caramels de la même couleur, il faudrait que j'en prenne au minimum 4 ;
- Deux caramels de couleurs différentes, il faudrait que j'en prenne au minimum 12 ;
- Deux caramels bleus, il faudrait que j'en prenne au minimum 10 ;
- Deux caramels verts, il faudrait que j'en prenne au minimum 16. »

Combien y a-t-il de caramels dans le bocal ?

**Solution (P.L.H.)**

- Par le principe des tiroirs, s'il y a  $n$  couleurs, il est nécessaire et suffisant d'en prendre  $n + 1$  pour en avoir deux de la même couleur.  
 On a donc  $n + 1 = 4$  et  $n = 3$ .
- Soit  $b$  le nombre de caramels bleus,  $v$  le nombre de verts,  $c$  le nombre de ceux de la troisième couleur ;  $b$ ,  $v$ , et  $c$  doivent être plus petits que 11 et l'un des trois doit être égal à 11.
- $v + c$  doit être égal à  $10 - 2 = 8$ .
- $b + c$  doit être égal à  $16 - 2 = 14$ .

On en déduit  $b - v = 14 - 8 = 6$ .

Comme  $v$  et  $c$  sont inférieurs à 7,  $b$  doit être égal à 11.

Alors  $v = 11 - 6 = 5$  et  $c = 8 - v = 3$ .

## Exercice n° 6 (Séries ES-L-STG)

### Enoncé

#### Remises

Un commerçant effectue trois remises successives sur un article d'un prix de 300 € et le vend finalement 222,87€.

Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières ?

### Solution (P.L.H)

Soient  $a, b, c$  les trois pourcentages. On a donc :

$$300(100 - a)(100 - b)(100 - c) = 222,87 \times (100)^3$$

$$\text{ou } (100 - a)(100 - b)(100 - c) = 742\,900 = 17 \times 19 \times 23 \times 5^2 \times 2^2.$$

$100 - a, 100 - b$  et  $100 - c$  sont tous les trois inférieurs à 100 donc supérieurs à 74,29 donc, étant entiers à 75.

A une permutation près, on a donc, comme  $17 \times 19 > 100$

$$\begin{aligned} 100 - a &= 17 \times 2^p \times 5^q \\ 100 - b &= 19 \times 2^{p'} \times 5^{q'} \\ 100 - c &= 23 \times 2^{p''} \times 5^{q''} \end{aligned}$$

avec  $p + p' + p'' = 2$  et  $q + q' + q'' = 2$  et  $75 \leq 100 - a \leq 100$  implique  $\frac{75}{17} \leq 2^p \times 5^q \leq \frac{100}{17}$ .

Avec  $\frac{75}{17} \approx 4,4$  et  $\frac{100}{17} \approx 5,9$  donc  $2^p \times 5^q = 5$  d'où  $q = 1$  et  $p = 0$ .

De même,  $\frac{75}{19} \approx 3,9$  et  $\frac{100}{19} \approx 5,3$  donc  $4 \leq 2^{p'} \times 5^{q'}$

et  $\frac{75}{23} \approx 3,2$  et  $\frac{100}{23} \approx 4,3$  donc  $2^{p''} \times 5^{q''} = 4$  d'où  $p'' = 2$  et  $q'' = 0$ .

Finalement  $p' = 2 - p - p'' = 0$  et  $q' = 2 - q - q'' = 1$

d'où  $a = 100 - 17 \times 5 = 15$ ,  $b = 100 - 19 \times 5 = 5$  et  $c = 100 - 23 \times 4 = 8$ .