

VERSAILLES

Exercice n° 1 (Séries S et STI)

Enoncé

Géométrie de l'à peu près

Le plan est muni d'une distance. On donne les définitions suivantes :

Définition 1 : Deux points sont *presque égaux* si leur distance est inférieure à 0,1 (un dixième d'unité) ;

Définition 2 : Deux segments ont *presque la même longueur* si leurs longueurs diffèrent de moins de 0,1 ;

Définition 3 : Un triangle est *presque équilatéral* si ses côtés ont presque la même longueur deux à deux.

1. Un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse $[BC]$ a pour longueur 1 peut-il être presque équilatéral ?
2. Un triangle rectangle peut-il être presque équilatéral ?
3. On considère un segment $[BC]$ de longueur 2, on note I le milieu de $[BC]$.
À tout point A du plan tel que $AB = 2$, on associe son projeté orthogonal H sur la droite (BC) .
 - a. Quel est l'ensemble des points A tels que I et H soient presque égaux ?
 - b. Si I est presque égal à H , le triangle ABC est-il presque équilatéral ?

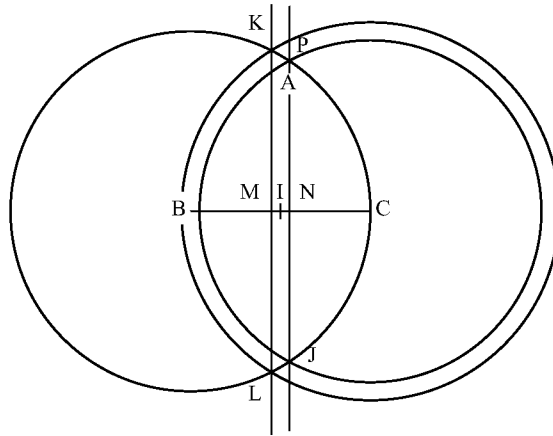
Solution

1. Si x et y sont les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont les mesures diffèrent de 1 de moins de 0,1, alors la somme de leurs carrés est strictement supérieure à $2 \times (0,9)^2 = 1,62$, strictement supérieur à $(1,1)^2 = 1,21$.
2. Pour peu que ses côtés soient assez petits ...
3. a. Cet ensemble est la réunion des deux arcs $\widehat{KP}$ et $\widehat{LJ}$ du cercle de centre B et de rayon 2 avec $IM = IN = 0,1$.
b. Le triangle ABC est presque équilatéral si et seulement si la longueur CA est comprise entre 1,9 et 2,1, c'est-à-dire si le point A appartient à la réunion

de deux arcs du cercle de centre B et de rayon 2. Ces arcs ne sont pas égaux aux précédents. En effet :

$$\begin{aligned} CP^2 &= CN^2 + NP^2 \\ &= CN^2 + AP^2 - BN^2 \\ &= 0,9^2 + 4 - 1,1^2 = 3,6 \end{aligned}$$

On a $3,6 < 1,9^2 = 3,61$: I est presque égal à N mais le triangle PBC n'est pas presque équilatéral.



Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Énoncé

Comment débutent les puissances de 2 ?

Étant donné un entier naturel n , on considère l'ensemble des puissances de 2 comprises, au sens large, entre 1 et 2^n .

On note α_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 1, par 2 ou par 3.

On note β_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 4, par 5, par 6 ou par 7.

On note γ_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 8 ou par 9.

1. Déterminer α_{15} et β_{15} .
2. Que peut-on conjecturer de la limite éventuelle de $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$?
3. Démontrer ce résultat (on pourra montrer que, pour tout entier n , $\alpha_n - 2 \leq 2\beta_n \leq \alpha_n$).

Solution

1. On lit $\alpha_{15} = 10, \beta_{15} = 4$.

2. En allant plus loin, il semble que $\frac{\beta_{15}}{\alpha_{15}}$ tende vers 2.

3. Chaque puissance de 2 commençant par 4, 5, 6 ou 7 est suivie de deux puissances commençant par 1, 2 ou 3 (et éventuellement d'une commençant par 8 ou 9) avant que cette occurrence se reproduise. Comme la liste débute par deux puissances commençant par 1 et 2 (ce sont d'ailleurs 1 et 2), où qu'on s'arrête on peut écrire :

$$\alpha_n - 2 \leq 2\beta_n \leq \alpha_n.$$

Cette inégalité a lieu pour tout n .

On passe au quotient : pour tout n on a $\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_n} \leq \frac{\beta_n}{\alpha_n} \leq \frac{1}{2}$.

On conclut en tenant compte de la limite infinie de la suite (α_n) .

Solution 2 (avec calculatrice – André Guillemot)

Pour conjecturer sur la limite éventuelle du rapport $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ la difficulté est d'isoler le premier chiffre de chaque puissance de 2. Pour cela nous allons utiliser la calculatrice TI-Nspire et ses possibilités de travailler sur les chaînes de caractères.

La fonction *compt*(n) suivante donnera α_n et β_n pour tout n donné :

Define <i>compt</i> (n)=	Func	
	Local a, b, c, p, i	
	$a := 0$	a et b corres-
		pondent à α_n et
		β_n
	$b := 0$	
	For $i, 0, n$	c est la chaîne de
		caractères associée
		à
	$c := \text{string}(2^i)$	l'écriture décimale
		de 2^i
	$p := \text{expr}(\text{left}(c, 1))$	p est le nombre égal
		au caractère
	If $p = 1$ or $p = 2$ or $p = 3$	de gauche de la
		chaîne c
	$a := a + 1$	
	If $p = 4$ or $p = 5$ or $p = 6$ or $p = 7$	
	$b := b + 1$	
	EndFor	
	Return $\{a, b\}$	
	Endfunc	

<i>compt</i> (15)	{ 10,4 }
<i>compt</i> (30)	{ 19,9 }
<i>compt</i> (50)	{ 31,15 }
<i>compt</i> (100)	{ 61,30 }
<i>compt</i> (200)	{ 121,60 }
<i>compt</i> (500)	{ 302,150 }
<i>compt</i> (602)	{ 363,181 }
7/99	

1. On peut conclure que $\alpha_{15} = 10$ et $\beta_{15} = 4$

2. Modifions la fonction précédente pour qu'elle nous fournisse directement le rapport $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$

```

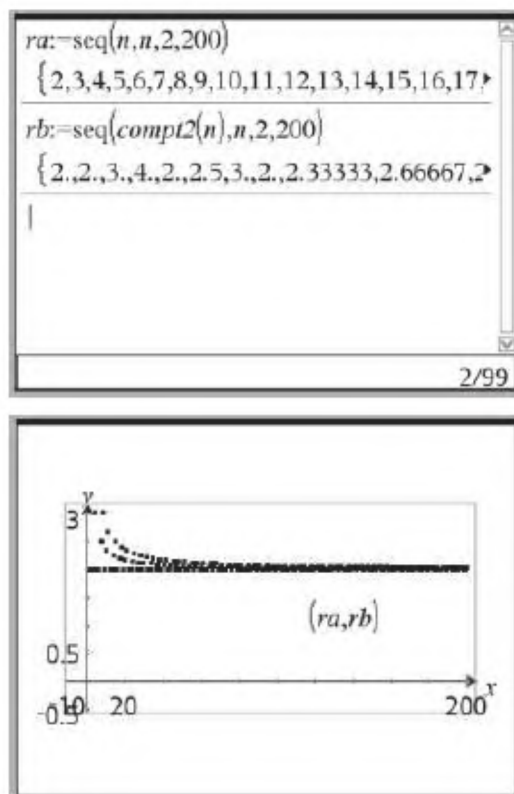
Define compt2(n)=  Func
                  Local a, b, c, p, i
                  a := 0
                  b := 0
                  For i, 0, n
                  c := string(2i)
                  p := expr(left(c, 1))
                  If p = 1 or p = 2 or p = 3
                  a := a + 1
                  If p = 4 or p = 5 or p = 6 or p = 7
                  b := b + 1
                  EndFor
                  Return approx(a/b)
                  Endfunc

```

On va représenter graphiquement ce rapport pour n variant de 2 à 200.

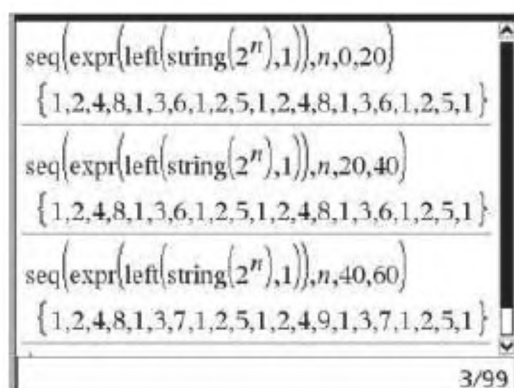
En abscisse la suite ra des nombres n de 2 à 200.

En ordonnée la suite rb des quotients pour n variant de 2 à 200.



On peut conjecturer que le rapport $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ tend vers 2, donc le rapport $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$.

3. Examinons le premier chiffre de l'écriture décimale des premières puissances de 2.



Chaque puissance de 2 commençant par 4, 5, 6 ou 7 est suivie de deux puissances commençant par 1, 2 ou 3 (et parfois d'une commençant par 8 ou 9).

Comme on commence par 1 et 2 avant d'avoir un 4 on peut dire que :

$$\alpha_n - 2 \leq 2\beta_n \leq \alpha_n \text{ pour tout } n. \quad (1)$$

$$\alpha_n > \frac{n}{2} \text{ donc la suite } (\alpha_n) \text{ tend vers } +\infty$$

En divisant par $2\alpha_n$ les membres de l'inégalité (1), on a $\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_n} \leq \frac{\beta_n}{\alpha_n} \leq \frac{1}{2}$

Il en résulte que le rapport $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice n° 3 (Séries STG, ES et L)

Enoncé

Rallye numérique

On choisit un nombre, puis on a le choix entre :

- lui ajouter 3;
- le multiplier par 5.

On recommence avec le nombre obtenu, et ainsi de suite.

1. Partant du nombre 1, est-il possible d'obtenir 2007 au bout d'un certain nombre d'étapes ?
2. Trouver l'ensemble des entiers qu'on peut prendre au départ pour obtenir 2007 en un certain nombre d'étapes.
3. Quel est le nombre minimum d'étapes nécessaires pour parvenir à 2007 en partant de 3 ?

Solution

1. 2 007 est un multiple de 3. Ses prédécesseurs par addition de 3 ou multiplication par 5 sont eux aussi des multiples de 3, parmi lesquels ne figure pas 1.

2. À partir de n'importe quel multiple de 3 inférieur à 2007, on peut obtenir 2 007 en ajoutant 3 le nombre de fois qu'il faut. Le produit par 5 fait gagner des étapes, c'est tout. En revanche, un nombre de la forme $3n + 1$ garde cette forme lorsqu'on lui ajoute 3 et est transformé en un nombre de la forme $3n + 2$ lorsqu'on le multiplie par 5, et un nombre de la forme $3n + 2$, qui garde cette forme lorsqu'on lui ajoute 3, est transformé en un nombre de la forme $3n + 1$ lorsqu'on le multiplie par 5. Il n'y a donc aucun espoir d'obtenir un multiple de 3 à partir d'un non multiple de 3.

3. Le nombre minimum d'étapes est douze. On fait le parcours à l'envers.

$3 \rightarrow 15 \rightarrow 75 \rightarrow 78 \rightarrow 390 \rightarrow 393 \rightarrow 396 \rightarrow 399 \rightarrow 1995 \rightarrow 1998 \rightarrow 2001 \rightarrow 2004 \rightarrow 2007$.

Exercice n° 4 (Séries STG, ES et L)

Enoncé

Bonnes affaires

Une chaîne de magasins fait la proposition suivante :

« Pour tout achat d'un montant minimum de 60 euros, un bon d'achat de 10 euros est offert, utilisable sur un achat d'un montant minimum de 40 euros ».

1. On effectue deux achats successifs, l'un de 60 euros, l'autre de 40 euros. Quelle réduction, exprimée en pourcentage, a été consentie sur l'ensemble de ces achats ?
2. Quelle est, en pourcentage, la réduction consentie sur deux achats successifs de 60 euros ?
3. Un client décide d'effectuer des achats successifs de 60 euros.
 - a. Quelle est, en pourcentage, la réduction consentie sur trois achats successifs ? Sur quatre achats ?
 - b. La réduction obtenue sur une série d'achats successifs a-t-elle une limite ?

Solution

1. La remise effectivement consentie s'élève à 10 € pour un achat total de 100 €. Elle est de 10%.

2. La remise effectivement consentie s'élève à 10 € pour un achat total de 120 €. Elle est de 8,03 % (valeur arrondie au centième).

3. Sur trois achats successifs de 60 €, la remise consentie est de 20 €, soit $\frac{2 \times 10}{3 \times 60}$, en pourcentage 11,11% (arrondi au centième). Sur quatre achats le calcul donne $\frac{3 \times 10}{4 \times 60}$, en pourcentage 12,5%.

Plus généralement, si on effectue n achats, la remise s'exprime par $R_n = \frac{(n-1) \times 10}{n \times 60}$, et croît avec n sans dépasser $\frac{1}{6} \approx 16,67$ %.

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2005

OLYMPIADES INTERNATIONALES

2006 Problème n° 4	204
2006 Problème n° 1	205

OLYMPIADE INTERNATIONALE

HANOI 2007

Pour la 48^{ème} Olympiade Internationale de Mathématiques (Hanoi, épreuves les 25 et 26 juillet), qui a accueilli un nombre record de pays (93) et de candidats (520), le Vietnam avait présélectionné des énoncés difficiles : le meilleur candidat n'a obtenu que 37/42 et le meilleur pays, 184/252, ce qui ne s'était jamais produit ! Hormis en 1999 et 1996 (cf. <http://www.imo-official.org/>), depuis plus de vingt ans, au moins un candidat réussissait le score maximum 42/42 et au moins un pays dépassait 210/252.

Malgré la médaille d'or de Benjamin Scellier (29/42), la France se classe 43^{ème}, avec notamment un 5/42 et un 4/42. Pourtant, le problème 4 était particulièrement facile : il peut être posé dès le collège. Il suffisait de résoudre le 1 et le 4 pour avoir une médaille de bronze, et si l'on trouvait en outre le 5, on obtenait l'argent. Seuls les problèmes 3 et 6 étaient quasiment infaisables (deux candidats sur 520 ont résolu le 3 et cinq le 6).

L'image des mathématiques dans l'opinion publique tirerait profit de meilleurs résultats à cette compétition, mais cela nécessite d'intensifier notre préparation. Le stage olympique d'août 2007 a accueilli 39 stagiaires de fin de troisième à fin de première, dans le château espérantiste de Grésillon (Maine et Loire) ; des séminaires olympiques sont assurés à Lyon, par Bodo Lass, et à Orsay, par Louis Santharoubane ; à Versailles, des stages sont organisés pour la pépinière d'élèves de troisième issus notamment de l'Olympiade académique de quatrième (24 avril 2007).

Voici un échantillon de l'Olympiade Internationale 2007. Si vous repérez des élèves intéressés par cette préparation olympique, conseillez-leur de consulter notre site : <http://www.animath.fr> et de nous écrire à : animath@animath.fr.

François LO JACOMO

Problème n° 4

Enoncé

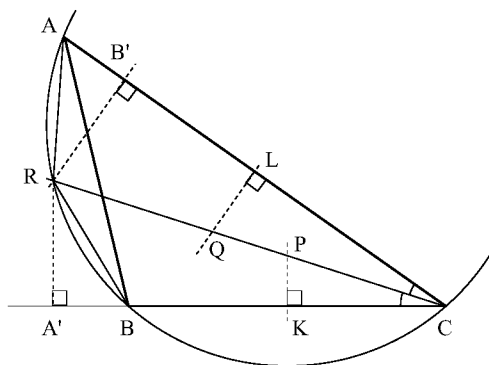
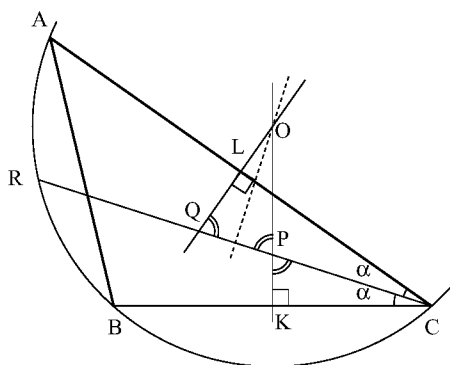
Dans un triangle ABC , la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R , coupe la médiatrice de $[BC]$ en P et la médiatrice de $[AC]$ en Q . Le milieu de $[BC]$ est K . Le milieu de $[AC]$ est L . Montrer que les triangles RPK et RQL ont même aire.

Solutions

Plusieurs solutions sont en principe accessibles à un collégien.

1. Par exemple : si l'on appelle α l'angle $\widehat{ACR}$, égal par hypothèse à l'angle $\widehat{BCR}$, la hauteur issue de L du triangle RQL vaut $CL \cdot \sin \alpha = CQ \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

De même, la hauteur issue de K du triangle RPK vaut $CK \cdot \sin \alpha = CP \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$. Or la médiatrice de $[AC]$, (LQ) , passe par le centre O du cercle circonscrit, tout comme la médiatrice (KP) de $[BC]$. Et comme $\widehat{KPC} = 90^\circ - \alpha = \widehat{LQC}$, le triangle OPQ est isocèle : la médiatrice de $[PQ]$ passe elle aussi par O , tout comme la médiatrice de $[RC]$. $[RC]$ et $[PQ]$ ont donc même milieu, ce qui entraîne $RP = QC$ et $RQ = PC$; si bien que l'aire du triangle RPK , qui vaut $\frac{1}{2} RP \cdot CP \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, est bien égale à $\frac{1}{2} RQ \cdot CQ \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, aire du triangle RQL .



2. En utilisant les angles inscrits : posons $a = BC$ et $b = AC$, et projetons R en A' et B' sur (BC) et (AC) respectivement. Les triangles rectangles $RA'B$ et $RB'A$ sont isométriques : les angles inscrits $\widehat{RAB'}$ et $\widehat{RBA'}$ sont égaux, et R est équidistant de A' et B' (qui plus est, les cordes $[RA]$ et $[RB]$ sont manifestement égales). Il en résulte que $AB' = BA'$, donc que $CA' + CB' = CA + CB = a + b$.

Par symétrie, $CA' = CB' = \frac{(a+b)}{2}$, si bien que la hauteur issue de R du triangle RPK , égale à $A'K$, vaut $\frac{b}{2}$. Comme la base $PK = CK$, $\tan \alpha = \frac{a}{2}$. $\tan \alpha$, l'aire du triangle RPK vaut $\frac{ab}{8} \cdot \tan \alpha$, et l'aire du triangle RQL , $\frac{1}{2} \cdot B'L \cdot QL$, vaut elle aussi $\frac{ab}{8} \cdot \tan \alpha$.

3. Jean-Michel Slowik (62 – Arras) propose même une solution encore plus élémentaire, strictement au programme de quatrième, reposant sur ce qu'il appelle « théorème du papillon ». Comme (PK) et (LQ) passent par le centre O du cercle circonscrit et que les triangles OPQ et OAC sont isocèles, ils ont même axe de symétrie (Δ) . La symétrie par rapport à (Δ) envoie K en un point M qui appartient à (OQ) . Or $\widehat{LCR} = \widehat{RCK} = \widehat{CRM}$: (RM) est donc parallèle à (LC) , ce qui prouve que les triangles RLM et RCM ont même aire. En supprimant leur intersection RQM , les deux « ailes de papillon » : RQL et CQM (symétrique de RPK) ont même aire.

Problème n° 1

Enoncé

Soit n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pour chaque i ($1 \leq i \leq n$) on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

et on pose $d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$.

a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (*)$$

b) Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ tels que $(*)$ soit une égalité.

Solution

Un peu pénible par tous ces indices à manipuler, ce problème n'était pas très difficile. Il convient de remarquer, tout d'abord, que les d_i sont tous positifs ou nuls, car $\max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} \geq a_i \geq \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$. Donc, *a fortiori*, $d \geq 0$.

a) Soit k l'un des indices pour lesquels $d_k = d$, et soient p et q deux indices ($p \leq k \leq q$) tels que $a_p = \max\{a_j : 1 \leq j \leq k\}$ et $a_q = \min\{a_j : k \leq j \leq n\}$.

Par définition, $d = a_p - a_q = (a_p - x_k) + (x_k - a_q)$. Comme la famille des x_i est croissante, $x_p \leq x_k \leq x_q$, donc $(a_p - x_p) + (x_q - a_q) \geq d$. Or par définition de la valeur absolue, $a_p - x_p \leq |a_p - x_p|$ et $x_q - a_q \leq |x_q - a_q|$, de sorte que $|x_p - a_p| + |x_q - a_q| \geq d$: l'un au moins de ces deux réels est supérieur ou égal à $\frac{d}{2}$.

A fortiori, $\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}$.

b) Posons $x_i = \frac{1}{2} \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} + \frac{1}{2} \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$.

Il est clair que $\max\{a_j : 1 \leq j \leq i\}$ est croissant, tout comme $\min\{a_j : i \leq j \leq n\}$, donc la famille de x_i ainsi définie est bien croissante.

$$\begin{aligned} \text{Or : } x_i - a_i &\leq x_i - \min\{a_j : i \leq j \leq n\} \\ &= \frac{1}{2} \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \frac{1}{2} \min\{a_j : i \leq j \leq n\} = \frac{d_i}{2} \end{aligned}$$

et : $a_i - x_i \leq \max\{a_j : 1 \leq j \leq n\} - x_i$

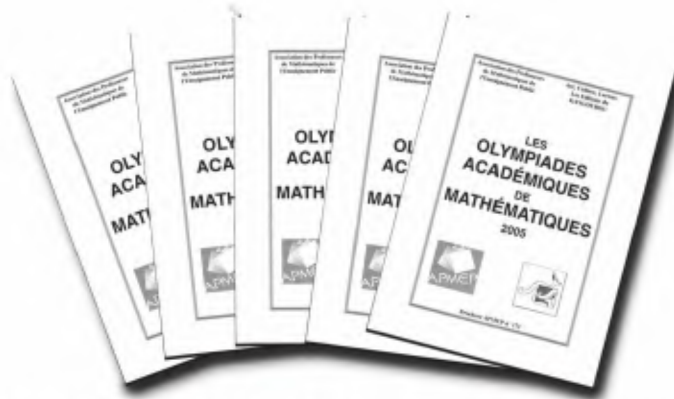
$$= \frac{1}{2} \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \frac{1}{2} \min\{a_j : i \leq j \leq n\} = \frac{d_i}{2}$$

ce qui entraîne : $\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \frac{d}{2}$. Etant donné la minoration

obtenue à la question (a), on a nécessairement : $\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = \frac{d}{2}$.

Et oui... vous avez entre les mains la **SEPTIEME**
brochure des **OLYMPIADES**!

Depuis 6 ans, l'Apmep a mis à la disposition
des enseignants de mathématiques
plusieurs centaines d'exercices
donnés lors des Olympiades



Une véritable base de données dans laquelle les professeurs
(qu'ils soient débutants ou expérimentés) peuvent se servir
pour trouver des exercices, souvent innovants, leur permettant
de varier leurs sources et donnant à leurs élèves des exercices
accessibles, intéressants, voire séduisants.

N'hésitez pas à compléter votre collection.

Olympiades 2001 (n° 142) : prix public : 10 €, prix adhérent : 7 €
Olympiades 2002 (n° 146) : prix public : 13 €, prix adhérent : 9 €
Olympiades 2003 (n° 158) : prix public : 14,50 €, prix adhérent : 10 €
Olympiades 2004 (n° 163) : prix public : 18 €, prix adhérent : 12 €
Olympiades 2005 (n° 171) : prix public : 13 €, prix adhérent : 9 €
Olympiades 2006 (n° 177) : prix public : 13 €, prix adhérent : 9 €
Achat groupé (2001-2005) : les cinq brochures ensemble : 34 €
quatre, au choix, sur les cinq : 28 € (port en sus)