

TOULOUSE

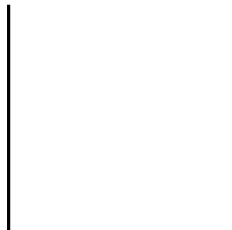
Exercice n° 1 (toutes les séries)

Enoncé

Mon chat

Mon chat déteste la pluie. Lorsqu'il pleut, il cherche un abri et se met le plus loin possible du bord de l'abri.

1. Ainsi, sous la table du jardin, qui est un carré de 1m de côté, il se blottit sous le centre de la table et n'en bouge plus. À quelle distance est-il du bord de la table ?
2. Lorsqu'il est à l'abri sous une table rectangulaire de côté 0,9m sur 1,80m, le chat se déplace sur un segment de droite.
 - (a) Quelle est la longueur de ce segment ?
 - (b) De manière plus générale, quelle relation peut-on établir entre la longueur L , la largeur ℓ (de la table rectangulaire) et la longueur du segment sur lequel se déplace le chat ?
 - (c) Proposer un autre abri lui permettant de se déplacer sur un segment de longueur 0,9m et dont l'aire est inférieure à celle de l'abri proposé au a).
3. Mon chat peut-il rêver d'un abri qui lui permettrait de se promener sur le long de deux segments perpendiculaires et de même longueur ? Si oui, dessiner un tel abri et justifier le songe du chat, sinon montrer pourquoi ce n'était qu'un rêve de félidé.



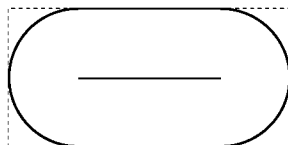
Solution 1

1) Le chat est à 0,5m du bord de la table.

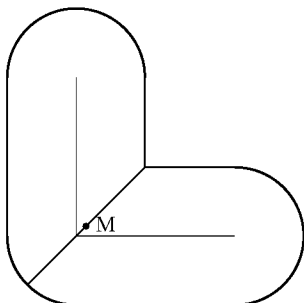
2) a) la longueur du segment est $1,80 - 2 \times 0,45$ soit 0,9 m

b) $c = L - \frac{2 \times \ell}{2} = L - \ell$.

c) il peut notamment se promener sous une « table ovale » :

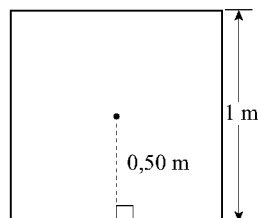


3) L'ensemble des points de promenade est le lieu du centre du cercle de rayon maximum inclus dans l'abri. Nécessairement, le bord de l'abri doit comporter des bords parallèles au « coin ». On obtient donc la figure ci-dessous. Pourtant, quel que soit alors le rayon, il n'est pas maximum. Pour cette figure le point M (milieu du segment) se trouve alors plus éloigné des bords que ceux des deux segments. C'est l'abri du chat. Le chat ne peut pas trouver d'abri lui permettant de se promener sur un « coin ».



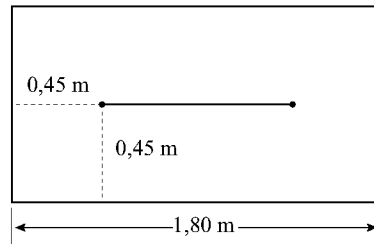
Solution 2

1) Le chat est à 0,50m de chaque côté de la table.



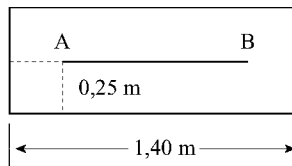
2) a) Le chat peut se déplacer sur un segment $[AB]$ parallèle aux longueurs du rectangle, distant de chacun de ces côtés de 0,45 m. Donc A et B sont chacun distants d'une des largeurs du rectangle de 0,45 m. Ainsi,

$AB = 1,80 - 2 \times 0,45 = 0,90$. La longueur du segment est de 0,90m.

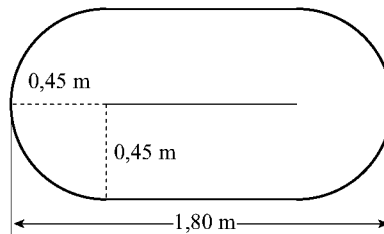


b) De manière plus générale, par un raisonnement analogue, on obtient la relation : $L - \frac{2 \times \ell}{2}$ d'où $L = c + \ell$.

c) Avec un abri rectangulaire, il suffit de prendre un rectangle de largeur inférieure à 0,90 m : par exemple un rectangle de longueur 1,40 m et de largeur 0,50 m convient.



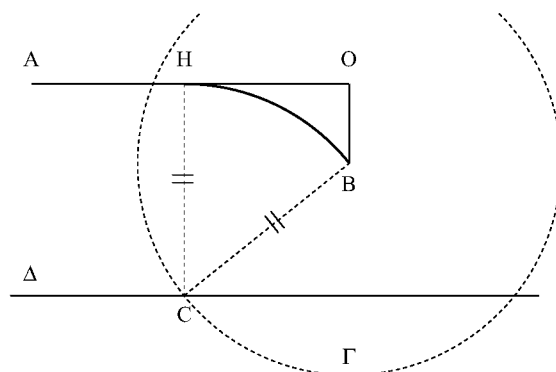
D'autres formes sont également possibles, telles que celle-ci.



3) Supposons que le chat puisse se promener le long de deux segments perpendiculaires $[AA']$ et $[BB']$ se coupant en O . On n'enlève rien à la généralité du raisonnement en posant que $OA > OB$. Notons d la distance minimale entre les segments et le bord de l'abri.

Soit Δ l'image de la droite (OA) par la translation de vecteur $\frac{d}{OB} \overrightarrow{OB}$.

Soit Γ le cercle de centre B et de rayon d , et C le point d'intersection de Γ et Δ situé dans le demi plan délimité par (OB) contenant A . Enfin, H est le projeté orthogonal de C sur (OA) . Alors la projection du bord de l'abri contient un segment inclus dans Δ dont une extrémité est C (et se prolongera ensuite à l'extérieur du cercle Γ). Mais avec un tel abri, le chat pourra se promener non seulement le long des segments $[AA']$ et $[BB']$, mais aussi à l'intérieur de la zone délimitée par $[OH]$, $[OB]$ et l'arc $\widehat{HB}$.



Ce n'était donc qu'un rêve...

Exercice n° 2 (séries autres que S)

Enoncé

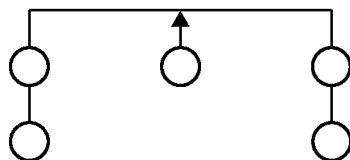
La balance

Une balance est constituée de plateaux contenant chacun un seul poids; éventuellement elle comporte un plateau sur l'axe.

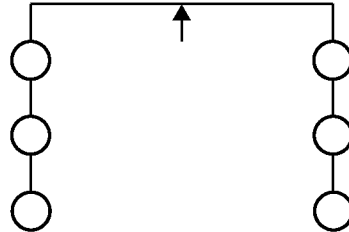
On dispose de poids numérotés. La masse en grammes de chaque poids est égale à son numéro. (Le poids n° 1 pèse 1g, le poids n° 2 pèse 2g. ...).

Le poids placé sur l'axe de la balance, s'il y en a un, n'a pas d'influence sur l'équilibre. À chaque fois, si l'on a besoin de k poids, on utilise les poids numérotés de 1 à k .

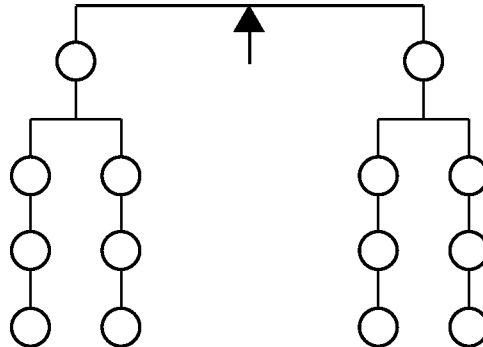
1. (a) On veut réaliser un équilibre sur la balance ci-dessous en utilisant tous les poids de 1 à 5. Proposer une répartition. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de réaliser un équilibre en plaçant le poids 2 sur l'axe.



- (b) On veut réaliser un équilibre sur la balance ci-dessous en utilisant tous les poids de 1 à 6. Pouvez-vous proposer une répartition ?



2. On veut réaliser un équilibre en utilisant tous les poids de 1 à 9. On place donc un poids sur l'axe et 4 poids de chaque côté.
- Proposer une répartition en plaçant le poids n° 5 sur l'axe.
 - Proposer une répartition en plaçant le poids n° 1 sur l'axe. Est-ce possible avec le n° 9?
3. Peut-on réaliser un équilibre avec les poids de 1 à 14 sur la balance ci-dessous ?



Solution

- 1) a) Une répartition :

	3	
1		4
5		2

Si le poids 2 est sur l'axe, il reste 13 grammes à répartir en deux parts égales et entières, c'est impossible.

Il en serait de même avec tout poids de masse paire. Par contre il est possible de réaliser l'équilibre avec tout poids de masse impaire sur l'axe.

- b) 21 grammes à répartir en deux parts égales et entières, c'est impossible. Il n'est pas plus possible de réaliser un équilibre avec un poids sur l'axe, il y aurait un nombre impair de poids à répartir.

- 2) a) Une répartition, le poids 5 étant sur l'axe :

	5	
9		1
2		8
3		7
6		4

b) Une répartition, le poids 1 étant sur l'axe :

	1	
2		9
8		3
7		4
5		6

c) Une répartition, le poids 9 étant sur l'axe :

	9	
1		8
7		2
6		3
4		5

La masse totale étant impaire, l'équilibre est seulement possible en plaçant un poids de masse impaire sur l'axe. Plus généralement :

- le nombre de poids étant impair (de la forme $2n + 1$) :
- si n est impair, la somme des masses de tous les poids est paire, l'équilibre n'est possible qu'en plaçant un poids de masse paire, quelconque, sur l'axe ;
- si n est pair, la somme des masses de tous les poids est impaire, l'équilibre n'est possible qu'en plaçant un poids de masse impaire, quelconque, sur l'axe.

3) Il y a 105 grammes à répartir à parts égales entières, c'est impossible.

Remarque (Dominique Roux)

Dominique Roux suggère une autre interprétation de cette question : si on suppose le système rigide et mobile uniquement autour de la flèche centrale, l'équilibre est assuré par l'égalité des moments.

Si, par exemple, chaque grand bras horizontal a pour longueur 2 et chaque petit bras horizontal la longueur 1, on vérifie que la configuration

	7				8	
10		5		6		13
11		4		3		12
14		1		2		9

satisfait la condition d'équilibre :

$$2 \times 7 + 3 \times (10 + 11 + 14) + 1 \times (5 + 4 + 1) = 2 \times 8 + 1 \times (6 + 3 + 2) + 3 \times (13 + 12 + 9)$$

Exercice n° 3 (séries S)

Énoncé

Le mauvais sujet

1. Dans une classe de lycée (dont l'effectif est réglementairement limité à 35 élèves), tous les élèves passent un test auquel il faut obtenir au moins 65 pour le réussir. La moyenne générale est de 66, la moyenne des reçus de 71 et la moyenne des recalés de 56.

Quelle est la proportion de reçus par rapport à l'effectif de la classe ?

2. À la suite d'une erreur mineure dans le sujet, le jury décide d'ajouter 5 points à tous les élèves. La moyenne des reçus passe alors à 80 et celle des recalés à 47. Toutes ces moyennes sont exactes (autrement dit ce sont des nombres entiers).

Trouver le nombre d'élèves reçus en plus et le nombre d'élèves de la classe.

Rectificatif : moyenne des reçus 74 au lieu de 80.

Solution

Notons x le nombre de reçus, y celui des recalés.

De $56x + 71y = 66(x + y)$, on tire : $x = 2y$. La proportion est $\frac{2}{3}$.

Après l'ajout des cinq points, il y a z reçus supplémentaires : De $47(y - z) + 74(x + z) = 71(x + y)$ et $x = 2y$, on tire : $3 = 2z$. Le nombre entier y est ainsi multiple de 3 ; $3y$ est inférieur à 35 : y peut donc valoir : 3, 6 ou 9.

De là trois possibilités : $z = 6$ et $x + y = 27$; $z = 4$ et $x + y = 18$; $z = 2$ et $x + y = 9$.

Un réciproque est nécessaire : ces effectifs répondent-ils aux conditions du problème ? Une classe de 27 élèves dans laquelle 18 ont la note 71, 6 la note 63, 3 la note 42 répond aux conditions du problème... On peut noter que, dans cette situation, chacune des sous-moyennes est entière.

Solution : 6 reçus supplémentaires pour 27 élèves, 4 reçus supplémentaires pour 18 élèves, 2 reçus supplémentaires pour 9 élèves.

Remarque :

Le sujet a été rectifié. Avec la valeur initialement proposée pour la moyenne de reçus après ajout de 5 points, il y a manifestement une impossibilité (que le bon sens impose ; cette réciproque ci-dessus est fausse). Malheureusement, ceci n'a été aperçu que l'épreuve passée. Le jury a été attentif aux réactions des candidats par rapport à cette erreur, l'esprit critique n'a pas fait défaut.