

STRASBOURG

Exercice n° 1 (Toutes sections sauf S)

Énoncé

Le dictionnaire

On a utilisé 6921 caractères d'imprimerie (chiffres) pour numéroté les pages d'un dictionnaire. Combien de pages ce dictionnaire contient-il ?
(chaque page est numérotée une seule fois, la première portant le numéro 1)

Solution (Paul-Louis Hennequin)

Il faut 9 caractères pour numéroté les 9 premières pages.
 $90 \times 2 = 180$ caractères pour numéroté les 90 suivantes (de 10 à 99),
 $900 \times 3 = 2\,700$ caractères pour numéroté les 900 suivantes (de 100 à 999).
Il reste $6\,921 - 2\,889 = 4\,032 = 4 \times 1\,008$ pour numéroté les 1 008 dernières pages.

Le dictionnaire contient donc $999 + 1\,008 = 2\,007$ pages.

Exercice n° 2 (Toutes sections sauf S)

Énoncé

Le digicode

La porte d'entrée d'un immeuble s'ouvre à l'aide d'un digicode. Celui-ci comporte trois lettres A, B, C et neuf chiffres (de 1 à 9). Le code d'accès à cet immeuble est formé de trois lettres suivies de trois chiffres.

1. Combien de codes différents peut-on composer ?
2. Combien y-a-t-il de codes différents commençant par AB ?
3. Combien y-a-t-il de codes différents finissant par trois chiffres identiques ?
4. Combien y-a-t-il de codes différents contenant le chiffre 1 ?

Solution (Paul-Louis Hennequin)

1. $3^3 \times 9^3 = 27 \times 729 = 19\,683$.
2. $3 \times 9^3 = 2\,187$.
3. $3^3 \times 9 = 243$.
4. On commence par compter ceux qui ne contiennent pas le chiffre 1, soit $3^3 \times 8^3$. Il en reste $3^3(9^3 - 8^3) = 27(729 - 512) = 27 \times 217 = 5\,859$.

Exercice n° 3 (Série S)**Énoncé****Le dictionnaire**

1. On a utilisé 6921 caractères d'imprimerie (chiffres) pour numéroté les pages d'un dictionnaire.
Combien de pages ce dictionnaire contient-il ?
(chaque page est numérotée une seule fois, la première portant le numéro 1)
2. On dispose d'un dictionnaire de N pages. On numérote les pages comme à la question précédente. Expliquer comment déterminer le nombre de caractères utilisés pour effectuer cette numérotation.

Solution (Paul-Louis Hennequin)

1. 2 007 (cf. exercice n° 1)
2. On détermine n tel que $10^n \leq N < 10^{n+1}$ ($n = \lfloor \log N \rfloor$).
Le nombre de caractères est

$$9 \sum_{k=1}^n k \times 10^{k-1} + (n+1)[N - 10^n + 1] = (n+1)(N+1) - \frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

Exercice n° 4 (Série S)**Énoncé****Les moyennes**

On dispose d'un ensemble de nombres réels vérifiant la propriété suivante : s'il contient certains nombres, il contient aussi leur moyenne.
On sait que cet ensemble contient effectivement 0 et 1.

1. Montrer qu'il contient $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{12}$.

2. Montrer qu'il contient tous les réels de la forme $\frac{1}{4^n}$ et $\frac{3}{4^n}$ avec n entier naturel non nul.
3. Montrer qu'il contient $\frac{1}{5}$.
4. Est-ce qu'il contient tous les réels de la forme $\frac{1}{n}$ avec n entier naturel non nul ?

Solution (Paul-Louis Hennequin)

1. $\frac{1}{2} = \frac{0+1}{2}$; $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0 \right)$; $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)$;
 $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right)$.
2. $\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4^{n-1}} + 0 \right) + 0 \right]$, puis récurrence sur n .
 $\frac{3}{4^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4^{n-1}} + 0 \right) + 0 \right]$.
3. $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}(1 + 0 + 0 + 0 + 0)$.
4. $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + 0 + \dots + 0)$.