

ROUEN

Exercice n° 1 (Séries S et STI)

Énoncé

Au tour des triangles rectangles

1. Existe-t-il des triangles rectangles dont l'hypoténuse ait pour longueur 14 et dont les deux autres côtés aient pour mesure des nombres entiers ?
2. Déterminer tous les triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières et dont un côté a pour longueur 14.

Solution 1

1. Soit n et m les longueurs des côtés cherchés. D'après le théorème de Pythagore, il vient $n^2 + m^2 = 14^2 = 196$. Ainsi $m = \sqrt{196 - n^2}$, avec $n \in]0; 14[\cap \mathbf{N}$. Il suffit d'utiliser le tableur de la calculatrice afin de passer en revue tous les cas, avec un pas de 1 pour les valeurs de la variable. On constate alors que toutes les valeurs de la fonction sont non entières. Ainsi, il n'existe aucun triangle répondant aux conditions imposées.

2. D'après la question précédente, si un tel triangle existe alors ou n ou m est égal à 14. Supposons que ce soit m et appelons p l'hypoténuse du triangle. On a donc : $14^2 = p^2 - n^2 = (p - n)(p + n)$. $p - n$ et $p + n$ sont des entiers naturels, et $p - n < p + n$. On cherche les diviseurs entiers naturels de 14^2 . Or $14 = 2 \times 7$. Donc 196 a pour diviseurs 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 ; 49 ; 98 ; 196.

On obtient des couples $(a; b)$ possibles pour $p - n$ et $p + n$. Or $p - n = a$ et $p + n = b \Leftrightarrow n = \frac{b - a}{2}$ et $p = \frac{b + a}{2}$. On a consigné les divers résultats dans le tableau ci dessous :

a	b	n	p
1	196	97,5	98,5
2	98	48	50
4	49	10,5	17,5
7	28	22,5	27,5
14	14	0	14

D'après ces résultats, seul le couple $(n; p) = (48; 50)$ est à valeurs entières. Or $48^2 + 14^2 = 50^2$. Donc, il n'existe qu'un seul triangle (à une isométrie près. . .) satisfaisant les conditions imposées : ses côtés ont pour longueurs : 14 ; 48 ; 50.

Solution 2 (avec calculatrice – André Guillemot)

1. Soit un triangle rectangle d'hypoténuse 14, x et y la mesure des deux autres côtés.

On a la relation $x^2 + y^2 = 14^2$

Cette relation peut s'écrire $y = \sqrt{196 - x^2}$ avec $0 < x < 14$ Il suffit de regarder la table de valeurs de cette fonction pour voir si on a un ou des y entiers.

X	Y1	
1	13.964	
2	13.856	
3	13.675	
4	13.416	
5	13.077	
6	12.649	
7	12.124	
X=1		

X	Y1	
8	11.489	
9	10.724	
10	9.798	
11	8.6603	
12	7.2111	
13	5.1962	
14	0	
X=14		

On peut conclure qu'il n'existe pas de triangle rectangle d'hypoténuse 14 tel que les mesures des côtés soient des entiers.

2. Puisque l'hypoténuse ne peut mesurer 14, désignons par y la mesure de l'hypoténuse et par x la mesure du deuxième côté de l'angle droit. (x et y étant des entiers.)

On a la relation $x^2 + 196 = y^2$

y étant la mesure du plus grand côté, on a donc $y \geq x + 1$, ce qui entraîne que $x^2 + 196 \geq (x + 1)^2$ d'où $x < 98$.

La relation précédente peut s'écrire $y = \sqrt{196 + x^2}$ avec $0 < x < 98$ Il suffit de regarder la table de valeurs de cette fonction pour voir si on a un ou des y entiers.

X	Y ₁	
44	46.174	
45	47.127	
46	48.083	
47	49.041	
48	50	
49	50.961	
50	51.923	
X=50		

X	Y ₁	
91	92.071	
92	93.059	
93	94.048	
94	95.037	
95	96.026	
96	97.015	
97	98.005	
X=96		

L'examen de la table de valeurs nous permet de dire qu'il n'existe qu'un triangle rectangle répondant aux conditions de l'énoncé et ce triangle a pour mesures 14,48 et 50.

Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Énoncé

Fonction de... fonction de ...

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Soit f_1 et f_n les fonctions définies pour tout $x \in \mathbf{R} - \{0; 1\}$ par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} \text{ et } f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$$

Calculer $f_{2007}(2007)$.

Solution 1

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_3(x) = x \quad \text{et} \quad f_4(x) = 1 - \frac{1}{x} = f_1(x).$$

Comme 2007 est un multiple de 3, f_{2007} est l'identité sur $\mathbf{R} - \{0; 1\}$.

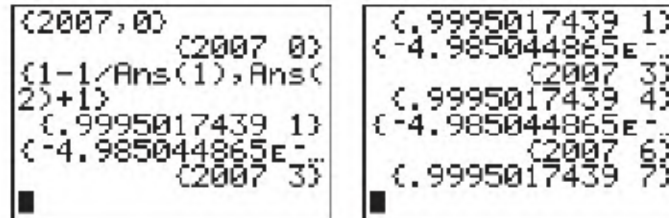
Nous avons donc $f_{2007}(2007) = 2007$.

Solution 2 (avec calculatrice – André Guillemot)

La calculatrice permet, grâce à la commande **Ans** de calculer n'importe quel terme de la suite à étudier.

2007	
	2007
1-1/Ans	
	.9995017439
	-4.98504487E-4
	2007

Si on veut calculer un terme ayant un indice assez élevé, mieux vaut mettre en place un compteur.



Comme 2007 est un multiple de 3, on peut conjecturer que $f_{2007}(2007) = 2007$.

Démonstration.

$$f(f(x)) = \frac{-1}{x-1} \text{ et } f(f(f(x))) = x.$$

On a donc $f_3(x) = x$, ce qui permet de dire que $f_{3n}(x) = x$.

D'où $f_{2007}(2007) = 2007$.

Exercice n° 3 (Séries L, ES, STG)

Enoncé

Le jeu des petits pavés

Voici un jeu pour deux joueurs, utilisant une figure constituée de petits pavés juxtaposés (dans cet exemple 6×9 pavés : figure 1). Le premier joueur choisit l'un des 54 pavés, par exemple celui marqué « a » sur la figure 2, et l'enlève ainsi que tous les pavés situés au-dessus et à sa droite.

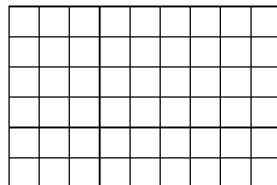


figure 1

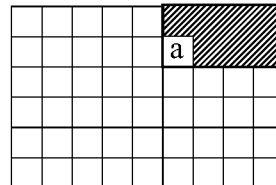


figure 2

Le deuxième joueur choisit alors l'un des pavés qui n'ont pas été enlevés, par exemple le pavé marqué « b » sur la figure 3 et l'enlève ainsi que tous les pavés situés au-dessus et à sa droite.

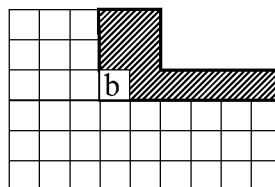
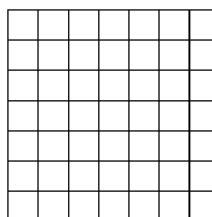


figure 3

C'est ensuite au tour du premier joueur de choisir un des pavés restants puis de l'enlever ainsi que tous les pavés situés au-dessus et à sa droite. Le jeu se poursuit ainsi, jusqu'à ce qu'un des joueurs enlève le pavé inférieur gauche et, ce faisant, perde la partie.

Première étude :

1. On considère la figure suivante constituée de 7×7 petits pavés juxtaposés. L'un des joueurs a-t-il le moyen de gagner à tout coup ?
2. Peut-on généraliser cette réponse dans les cas où la figure est formée de $n \times n$ pavés avec n un nombre entier supérieur ou égal à 2 ?

**Seconde étude :**

On considère la figure formée par $2 \times n$ petits pavés juxtaposés.

L'un des joueurs peut-il gagner à tout coup ?

**Solution****Problème 1 :**

Oui le premier joueur peut gagner à tous les coups.

Au premier coup, il enlève tout sauf la ligne du bas et la colonne de gauche ; cela forme un L à côtés égaux.

Quoique joue le deuxième joueur, le premier joueur reforme un L à côtés égaux, le deuxième joueur a perdu.

Deuxième problème :

Oui le premier joueur peut gagner à tous les coups.

Celui qui laisse une colonne, une ligne ou un carré a perdu.

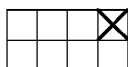
Celui qui laisse un L symétrique a gagné.

La valeur de n n'est pas spécifiée ($n = 1$, $n = 2$ sont évidents à traiter)

si $n = 3$



si $n = 4$



Le premier enlève un seul carré en haut à droite. Il oblige alors le second à recréer un rectangle jusqu'à obtenir un carré.

Exercice n° 4 (Séries L, ES, STG)**Enoncé****Histoire de montre...**

Aujourd'hui, 14 mars 2007, à 8 h 00, une montre donnait l'heure exacte.

On sait que pendant les douze heures à venir, elle avancera d'un quart de minute par rapport à l'heure réelle, puis pendant les douze heures suivantes (parce

qu'elle est moins secouée...), elle retardera d'un tiers de minute par rapport à l'heure réelle. Ce processus se répètera tous les jours suivants.

1. A quelle date et à quelle heure sera-t-elle pour la première fois en retard de deux minutes sur l'heure réelle ?
2. A partir de quelle date et à quelle heure, la montre retardera-t-elle toujours de plus de deux minutes sur l'heure réelle ?

Solution

1. Chaque jour à 8 h 00, la montre retarde de 5 secondes (+15 - 20) de plus que la veille.

Donc, 24 jours plus tard, la montre retarde de 120 secondes, soit 2 minutes.

C'est-à-dire le 7 avril à 8 heures.

2. Voici une copie d'un fichier tableur :

rang du jour	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
avance/retard	0	15	-5	10	-10	5	-15	0	-20
rang du jour	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
avance/retard	-5	-25	-10	-30	-15	-35	-20	-40	-25
rang du jour	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13
avance/retard	-45	-30	-50	-35	-55	-40	-60	-45	-65
rang du jour	13,5	14	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5
avance/retard	-50	-70	-55	-75	-60	-80	-65	-85	-70
rang du jour	18	18,5	19	19,5	20	20,5	21	21,5	22
avance/retard	-90	-75	-95	-80	-100	-85	-105	-90	-110
rang du jour	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5
avance/retard	-95	-115	-100	-120	-105	-125	-110	-130	-115
rang du jour	27	27,5	28	28,5	29	29,5	30		
avance/retard	-135	-120	-140	-125	-145	-130	-150		

Et on trouve que la montre retarde toujours de plus de 2 minutes 27,5 jours plus tard, soit le 10 avril à 20 heures.