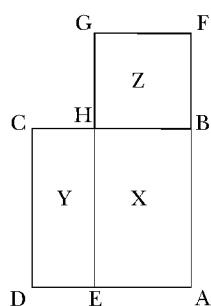


# RENNES

## Exercice n° 1 (Série S)

### Enoncé

#### Le nombre d'or et les lapins



Sur le plateau de Millevaches, Roger possède une importante parcelle carrée de 100 ha qui est imbriquée dans la propriété de sa voisine Monique. Celle-ci souhaite échanger avec lui une bande Y de son terrain mais Roger y met une condition : il veut pouvoir récupérer une zone carrée Z de même aire que Y et qui ait un côté commun avec le terrain restant X. Le dessin ci-contre précise cette situation.

Monique, qui a arpenté le terrain en carriole avec son cocher est convaincue que c'est possible.

**Question 1.** Quelle est alors la valeur du rapport  $\frac{HB}{HC}$  ? Elle a prévu de clore cet espace pour y élever des lapins.

**Question 2.** Quelle longueur de grillage doit-elle acheter ? Son marchand de matériaux lui demande cette longueur en valeur exacte et en valeur approchée au mètre près.

Elle a réfléchi à l'économie de son projet et a pris des conseils auprès d'un ami vétérinaire, qui lui a donné un certain nombre de conseils et en particulier lui a expliqué que statistiquement un couple de lapins est capable de procréer au bout d'un mois et donne naissance chaque mois à un nouveau couple. Par ailleurs la durée de gestation est d'un mois. Pour être plus clair et plus précis il lui décrit la situation pendant les premiers mois sous la forme du tableau ci-dessous.

| N° du mois | Nombre de couples adultes | Nombre de couples non adultes | Nombre de couples |
|------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------|
| 1          | 0                         | 1                             | 1                 |
| 2          | 1                         | 0                             | 1                 |
| 3          | 1                         | 1                             | 2                 |
| 4          | 2                         | 1                             | 3                 |
| 5          | 3                         | 2                             | 5                 |
| 6          | 5                         | 3                             | 8                 |
| 7          |                           |                               |                   |
| 8          |                           |                               |                   |
| 9          |                           |                               |                   |
| 10         |                           |                               |                   |

**Question 3.** Compléter le tableau ci-dessus.

**Question 4.** Chercher une formule qui permet le calcul du nombre  $u_{n+2}$  de couples présents le mois  $n + 2$  à partir des valeurs  $u_n$  (nombre de couples le mois  $n$ ) et  $u_{n+1}$  (nombre de couples le mois  $n + 1$ ).

Elle pense donc introduire un couple de lapereaux et dans un premier temps les laisser se reproduire sans en tuer ni en vendre en les gardant tous. Elle a également questionné un vieux paysan de ses voisins qui lui assuré qu'il n'y a aucun prédateur et qu'un lapin a besoin d'un espace de  $5 \text{ m}^2$  pour s'épanouir. Elle se demande cependant au bout de combien de mois intervenir pour ne pas risquer une surpopulation qui serait préjudiciable à son élevage.

**Question 5.** Pouvez-vous lui donner la réponse ?

**Question 6.** On note  $t_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$  le rapport du nombre de lapins du mois  $n + 1$  donné à celui du mois précédent  $n$ . Déterminer  $t_n + 1$  en fonction de  $t_n$ . De quelle valeur se rapproche  $t_n$  quand  $n$  devient de plus en plus grand ?

## Solution

1. On a une succession d'égalités :

a.  $CH \times CD = HB^2$  car Y et Z ont la même aire,

b.  $CH + HB = CD = CB$ , car  $H$  est un point du segment  $CB$ ,

c. d'où  $CH \times (CH + HB) = HB^2$  et  $1 + \frac{HB}{HC} = \frac{HB^2}{HC^2}$

d.  $\frac{HB}{HC}$  est la racine positive de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$  donc  $\frac{HB}{HC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$   
(nombre d'or souvent noté  $\Phi$ ).

2. Le périmètre  $p$  du terrain est

- a.  $2(CH + CD) = 2(CH + CB) = 2(2CH + HB) = 2CH \left( 2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) =$   
 $2(5 + \sqrt{5})CH$  or  $CB = CH + HB = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}CH$  et  $CH = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}CB$  donc  
 $p = 2(5 - \sqrt{5})CB$
- b. or l'aire du terrain de Roger vaut 100 ha ce qui implique  $CB = 1000$  m et  
 $p = 2000(5 - \sqrt{5})$ , arrondie au mètre  $p = 5\,527$  m.
- 3.

| N° du mois | Nombre de couples adultes | Nombre de couples non adultes | Nombre de couples |
|------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------|
| 1          | 0                         | 1                             | 1                 |
| 2          | 1                         | 0                             | 1                 |
| 3          | 1                         | 1                             | 2                 |
| 4          | 2                         | 1                             | 3                 |
| 5          | 3                         | 2                             | 5                 |
| 6          | 5                         | 3                             | 8                 |
| 7          | 8                         | 5                             | 13                |
| 8          | 13                        | 8                             | 21                |
| 9          | 21                        | 13                            | 34                |
| 10         | 34                        | 21                            | 55                |

4. On déduit aisément que  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

5. L'aire du terrain sur lequel Monique va élever ses lapins est, arrondie au  $\text{m}^2$ ,  
 $CH \times CD = CD^2 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 381\,966 \text{ m}^2$ .

Cela correspond à un nombre maximal de 76 393 lapins. La calculatrice avec sa fonction tableur indique qu'il serait prudent de s'arrêter au 25<sup>ème</sup> mois.

6. En ce qui concerne le rapport  $t_{n+1}$  il est égal à

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{u_{n+1}}{u_n}} = 1 + \frac{1}{t_n}.$$

Il apparaît que le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  prend des valeurs qui se stabilisent à partir du troisième mois autour de 1,6180.

Si le taux se stabilise on voit qu'il vérifie à peu près  $t = 1 + \frac{1}{t}$  ou  $t^2 = 1 + t$ , qui s'écrit encore  $t^2 - t - 1 = 0$ . C'est l'équation rencontrée au début de cet exercice dont la solution est  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

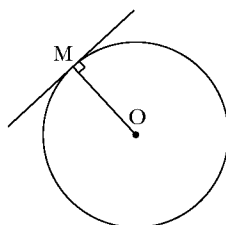
## Exercice n° 2 (Série S)

### Enoncé

#### Un cercle tangent à deux cercles donnés

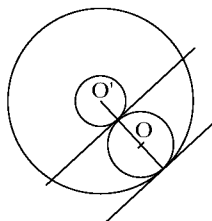
##### Rappel 1

Tangente à un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  en un point  $M$  donné du cercle : il s'agit de la perpendiculaire en ce point  $M$  à la droite passant par le centre  $O$  et le point  $M$ .



##### Rappel 2

Deux cercles tangents en un point sont deux cercles n'ayant qu'un point commun. Ces deux cercles admettent une tangente commune en ce point qui est donc aligné avec les centres des cercles.

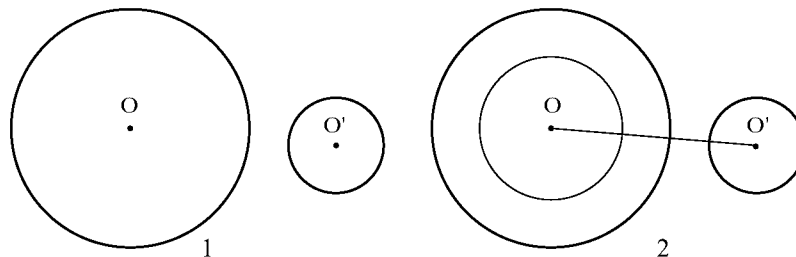


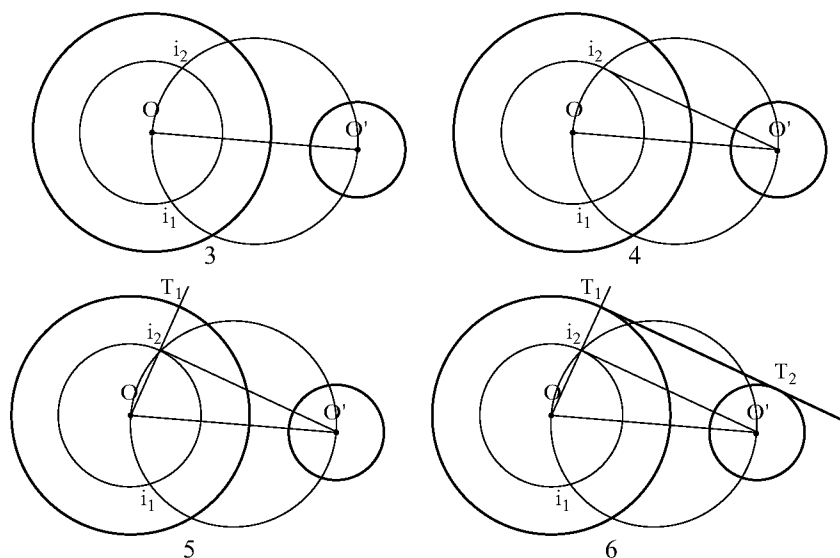
##### Question 1

On considère un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et un point quelconque  $A$  extérieur au cercle. Expliciter la construction, à la règle et au compas, des tangentes à ce cercle passant par  $A$ .

##### Question 2

On donne ci-dessous la réalisation d'un programme de construction en six étapes de la tangente commune à deux cercles de centres respectifs  $O$  et  $O'$  extérieurs l'un à l'autre.

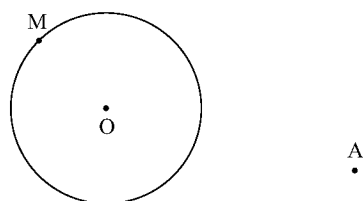




Expliciter ce programme. Il n'est pas demandé de démonstration mais d'indiquer les éléments construits et leur utilité.

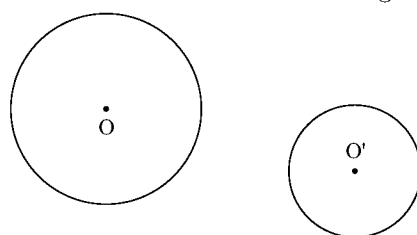
**Question 3** Indépendante de la question précédente

On donne ci-dessous un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et un point  $A$  extérieur à  $\mathcal{C}$ . Le point  $M$  est un point quelconque du cercle  $\mathcal{C}$ . Construire le cercle tangent à  $\mathcal{C}$  en  $M$  et passant par  $A$  et justifier cette construction. La construction doit figurer sur la copie.



**Question 4**

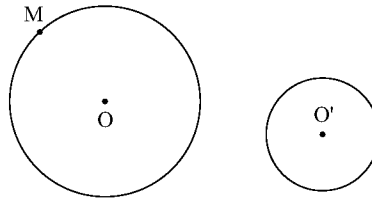
On considère maintenant les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  de centres respectifs  $O$  et  $O'$  extérieurs l'un à l'autre. Déterminer deux cercles tangents à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .



**Question 5**

En s'inspirant de la procédure examinée dans la question 2, expliciter la

construction des cercles tangents à  $C'$  et tangents à  $C$  en  $M$ . Est-ce possible pour tout point  $M$  du cercle  $C$  ?



## Solution

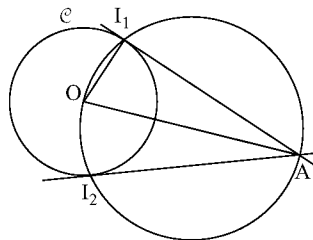
### Question 1

La méthode de raisonnement consiste à examiner une figure approximative réalisant l'objectif fixé et d'y repérer des éléments permettant de définir ensuite une procédure de construction.

Les points  $O$  et  $A$  étant donnés, on connaît donc le segment  $[OA]$ . D'après la définition de la tangente à un cercle, une droite tangente au cercle en un point  $I$  et passant par  $A$  est support du segment  $[AI]$  et est perpendiculaire au rayon aboutissant au point de tangence  $I$ . L'angle en  $I$  est droit et le triangle  $AOI$  est rectangle.

On sait que tout triangle rectangle est inscriptible dans un cercle dont le diamètre est l'hypoténuse de ce triangle. Le triangle est donc inscrit dans le cercle de diamètre  $[OA]$ .

Ce résultat nous conduit à une méthode de construction : on connaît  $[OA]$ , donc on connaît le cercle dont c'est un diamètre. Ce cercle construit est sécant au cercle  $C$  (il est sécant en deux points parce qu'il passe par un point intérieur à ce cercle :  $O$  et par un point extérieur à ce cercle :  $A$ ) en deux points  $I_1$  et  $I_2$ . La droite  $(AI_1)$  passe par l'extrémité du rayon  $[OI_1]$  et lui est perpendiculaire, c'est bien une tangente au cercle  $C$ . Même chose pour la droite  $(AI_2)$ .



### Question 2

*Figure 2* : construction du cercle  $C_1$  de centre  $O$  et de rayon  $R - R'$ ,  $R$  étant le rayon du cercle  $C$  et  $R'$  celui du cercle  $C'$ .

*Figure 3* : construction du cercle  $C_2$  de diamètre  $[OO']$  sécant en  $I_1$  et  $I_2$  au cercle  $C$ .

Figure 4 : construction d'une tangente au cercle  $\mathcal{C}$  passant par  $I_1$ .

Les figures 3 et 4 sont une application de la méthode de construction explicitée en question 1.

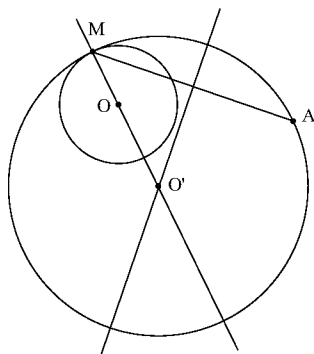
Figure 5 : construction de la demi-droite support du rayon perpendiculaire à la tangente coupant en  $T_1$  le cercle  $\mathcal{C}$ .

Figure 6 : construction de la tangente en  $T_1$  au cercle  $\mathcal{C}$ , perpendiculaire à  $(OT_1)$  en  $T_1$ . Cette droite est tangente en  $T_2$  au cercle  $\mathcal{C}'$ .

### Question 3

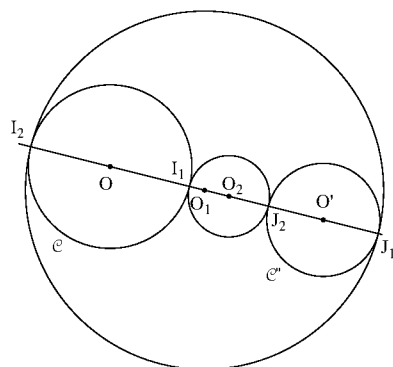
Le cercle à construire passe par  $A$  et par  $M$ , si son centre est  $O'$ , comme  $[O'A]$  et  $[O'M]$  sont des rayons,  $O'$  est équidistant de ces deux points donc sur la médiatrice de  $[MA]$ .

Le cercle à construire est tangent en  $M$  au cercle  $\mathcal{C}$  donc les points  $M, O$  et  $O'$  sont alignés. Le point  $O'$  est sur la droite  $(OM)$ . Le centre du cercle à construire est à l'intersection des deux droites définies précédemment. A savoir, la médiatrice de  $[MA]$  et la droite  $(MO)$ .



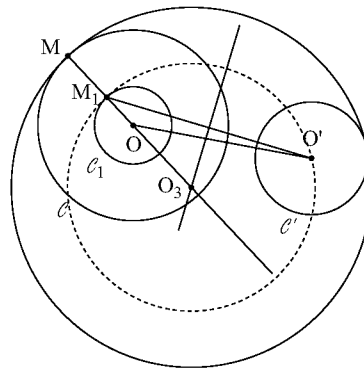
### Question 4

Deux cercles tangents peuvent se construire aisément. Ces deux cercles sont centrés sur la droite  $(OO')$  qui est sécante à  $\mathcal{C}$  en  $I_1$  et  $I_2$ , et sécante à  $\mathcal{C}'$  en  $J_1$  et  $J_2$ . Le cercle tangent insérant  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  a pour centre le milieu  $O_1$  de  $[I_2J_1]$ , les cercle s'insérant entre les deux cercles a pour centre le milieu  $O_2$  et de  $[I_1J_2]$ .



**Question 5**

En s'inspirant de la question 2, on commence d'abord par construire le cercle  $\mathcal{C}_1$  de centre  $O$  et de rayon  $R - R'$  différence des rayons des cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  (ici  $R > R'$ ). Le rayon  $[OM]$  du cercle  $\mathcal{C}$  coupe  $\mathcal{C}_1$  en  $M_1$ . On se propose maintenant de construire le cercle tangent à  $\mathcal{C}_1$  en  $M_1$  et passant par  $O'$ . Ceci nous ramène à la question 3. Ce cercle a pour centre le point d'intersection de la médiatrice de  $[O'M_1]$  et de la demi droite  $(M_1O)$  noté  $O_3$ . Ce point est aussi le centre du cercle tangent aux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Son rayon a pour longueur  $OM$ .

**Exercice n° 3 (Série STI)****Enoncé****Au jardin**

Monsieur Michel invite son jardinier à déjeuner pour discuter de l'héritage qu'il vient de faire.

1. La table prévue pour le repas est carrée de côté 0,90 m. Monsieur Michel ne trouve pas de nappes carrées pour la recouvrir. Il ne dispose que deux nappes rondes de diamètre 1 m chacune. Pourra-t-il la recouvrir complètement avec ces deux nappes ?
2. L'héritage en question consiste en un terrain dont les dimensions en mètres sont 160, 110, 190 et 130. Le notaire lui a précisé que les deux plus grands cotés sont parallèles et que le prix actuel du terrain est de 100 euros le  $m^2$ . Construire à l'échelle 1 : 1000<sup>ème</sup> la figure représentant ce terrain.
3. Quel est le prix de ce terrain ?
4. Il possède un autre terrain rectangulaire de 90 m  $\times$  140 m sur lequel il a l'intention de planter cinq séquoias. Pour optimiser leur développement il est nécessaire de réunir deux conditions :

- Ils doivent être situés à au moins 20 m des limites du terrain
- Deux quelconques de ces séquoias doivent être le plus éloignés possible l'un de l'autre.

Pendant le repas le jardinier lui dit qu'après réflexion la meilleure solution correspond à une distance minimale de 50 m.

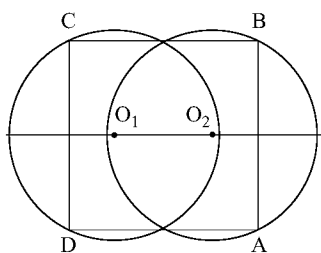
Est-ce possible ? Si oui représenter la situation.

5. L'aide du jardinier qui est arrivé à la fin du repas affirme qu'il a une solution correspondant à une distance minimale supérieure à 50 m.

Pouvez-vous imaginer sa solution ? Quelle est alors cette distance ?

## Solution

1. La réponse est non, en voici la raison :



Du fait de la symétrie de la figure ; il suffit de raisonner sur une demie table et une nappe. Une nappe de diamètre 100 cm recouvre-t-elle une table rectangulaire de 90 sur 45 ? Un rectangle de 45 sur 90 est-il inscriptible dans un cercle de rayon 50 ?

La diagonale d'un tel rectangle a pour mesure  $\sqrt{45^2 + 90^2} = 45\sqrt{5}$ , ce qui donne pour rayon du cercle circonscrit  $\frac{45\sqrt{5}}{2} > 50$  rayon de la nappe : il suffit de le vérifier sur les carrés de ces deux nombres.

2. Nous avons deux possibilités de figure :

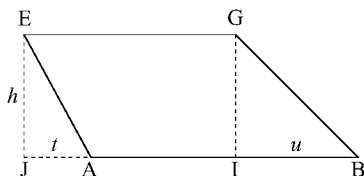


Figure 1

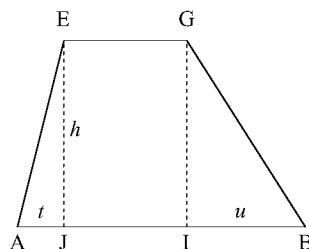


Figure 2

On aura donc deux solutions.

**Cas 1 :** On a :

$$t + 190 - u = 160, \text{ d'où } u - t = 30$$

$$h^2 + t^2 = 110^2$$

$$h^2 + u^2 = 130^2 \text{ d'où } u^2 - t^2 = 4\,800 \text{ et } u + t = 160.$$

Cela donne  $u = 95$  et  $t = 65$ .

### Cas 2 :

On a :  $t + u + 160 = 190$ , d'où  $u + t = 30$

$$h^2 + t^2 = 110^2$$

$$h^2 + u^2 = 130^2 \text{ d'où } u^2 - t^2 = 4\,800 \text{ et } u - t = 160.$$

ce qui donne  $u = 95$  **ce qui est donc impossible**, tous les nombres considérés étant positifs.

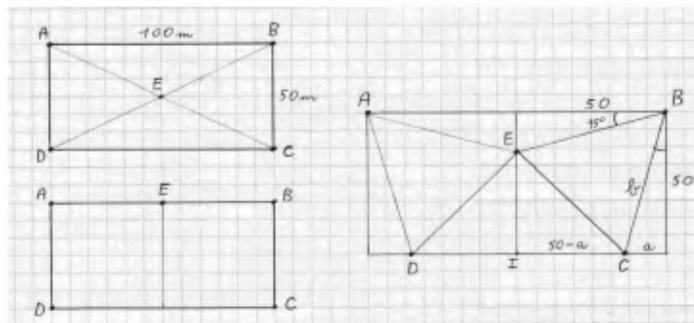
*Au total seule la solution 1 convient :*

La construction est obtenue en prenant pour  $E$  l'intersection du cercle de centre  $A$  et de rayon 11 cm et de la droite perpendiculaire à  $AB$  passant par le point  $J$  de cette droite tel que  $JA = 6,5$  cm.

3. On obtient pour  $h$  :

- la valeur exacte  $h = 15\sqrt{35}$
- la valeur approchée à  $10^{-2}$  près  $h \approx 88,74$
- l'aire est donc  $2\,625\sqrt{35} \text{ m}^2$  ou en valeur approchée  $15\,529,71 \text{ m}^2$ .
- le prix du terrain est donc à l'euro près 1 552 971 euros.

4.



Dans les deux dispositions de gauche, la distance minimale séparant deux arbres est de 50 m.

5. On peut faire mieux comme le montre le dessin de droite. Le triangle  $BCE$  est équilatéral.

Calculs : la trigonométrie élémentaire donne  $a = 50 \tan 15^\circ = 13,40 \text{ m}$  et  $b = \frac{50}{\cos 15^\circ} = 51,76 \text{ m}$ .

*Variante :*

le théorème de Pythagore donne  $b^2 = a^2 + 50^2 = 2(50 - a)^2$   
d'où  $a^2 - 200a + 2500 = 0$ , d'où  $a = 100 - 50\sqrt{3}$ .

## Exercice n° 4 (Séries STI, SMS, STG)

### Enoncé

#### La star Olympie

C'est le grand jour pour Magali, Jennifer, Nolwenn et Grégory : aujourd'hui c'est la finale de la STAR-OLYMPIE. Il y a 3 épreuves pour départager ces candidats.

La première épreuve est un SUDOLYMPI.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | O |   |   | L |   |   |   | Y |
| M |   |   |   |   | P |   |   | O |
| Y | P |   | O |   |   |   |   |   |
|   | I |   | A |   |   |   | O | D |
|   |   | Y |   |   |   | E |   |   |
| O | E |   |   |   | D |   | Y |   |
| I |   |   |   |   | M |   | L | P |
| A |   |   | D |   |   |   |   | I |
| L |   |   |   | Y |   |   | D |   |

(Il s'agit de compléter chaque ligne, chaque colonne et chacun des 9 carrés par les 9 lettres du mot : OLYMPIADE)

Jennifer excelle à cet exercice. Elle remporte l'épreuve en un temps record !

**Vous donnerez la grille qu'elle a trouvée.**

Déjà, c'est la deuxième épreuve :

#### AUTOUR DES NOMBRES 100 ET 10

- On donnera un grand nombre de réponses aux deux questions ci-dessous. Les opérations autorisées sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, les racines, les puissances et on peut "« coller » les chiffres, mettre entre parenthèses, etc.

- Il faut écrire 100 avec les 10 chiffres chacun une fois.

Exemple :  $100 = 0 + 1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9$

- Puis écrire 100 avec 5 fois le même chiffre.

Exemple :  $100 = 111 - 11$

- Ensuite, il faut trouver le plus petit entier ayant 10 diviseurs.

- Enfin, il faut donner le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale du nombre noté 100!

$$100! = 100 \times 99 \times 98 \times 97 \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Grégory s'est vraiment distingué dans cette recherche ! Quelles sont vos réponses ?

Et dans *la troisième épreuve* il faut rechercher dans le passé comme dans l'avenir les dates ci-dessous écrites avec 8 chiffres comme par exemple : 14 - 03 - 2007 (14 mars 2007).

- 1 - La dernière date avec des chiffres différents ?
- 2 - La prochaine date avec des chiffres différents ?
- 3 - La dernière date avec des chiffres tous impairs ?
- 4 - La prochaine date avec des chiffres tous impairs ?
- 5 - La dernière date avec des chiffres tous pairs ?
- 6 - La prochaine date avec des chiffres tous pairs ?

## Solution

*Première épreuve* : grille du SUDOLYMPI

Les caractères gras sont ceux de la grille de départ.

|          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| E        | <b>O</b> | D        | M        | <b>L</b> | A        | P        | I        | Y        |
| <b>M</b> | L        | A        | Y        | I        | <b>P</b> | D        | E        | <b>O</b> |
| <b>Y</b> | <b>P</b> | I        | <b>O</b> | D        | E        | M        | A        | L        |
| P        | <b>I</b> | M        | <b>A</b> | E        | Y        | L        | <b>O</b> | <b>D</b> |
| D        | A        | <b>Y</b> | L        | O        | I        | <b>E</b> | P        | M        |
| <b>O</b> | <b>E</b> | L        | P        | M        | <b>D</b> | I        | <b>Y</b> | A        |
| I        | D        | O        | E        | A        | <b>M</b> | Y        | L        | <b>P</b> |
| <b>A</b> | Y        | E        | <b>D</b> | P        | L        | O        | M        | <b>I</b> |
| L        | M        | P        | I        | <b>Y</b> | O        | A        | <b>D</b> | E        |

*Deuxième épreuve* : Autour des nombres 100 et 10.

a) Ecrire 100 avec les 10 chiffres, chacun une fois.

Quelques possibilités :  $0 + 123 - 45 - 67 + 89$

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9$$

$$0 + 1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9$$

etc.

b) Ecrire 100 avec 5 fois le même chiffre

$$99 + \frac{\sqrt{9 \times 9}}{9}$$

$$88 + 8 + \sqrt{8 + 8}.$$

c) Le plus petit entier ayant 10 diviseurs est  $48 = 2^4 \times 3$ .

d) Nombre de zéros de  $100!$  : il y a 24 zéros à la fin de l'écriture décimale.

*Troisième épreuve* : dates écrites avec 8 chiffres.

1 - La dernière date avec des chiffres différents : 25-06-1987.

2 - La prochaine date avec des chiffres différents : 17-06-2345.

- 3 - La dernière date avec des chiffres tous impairs : 19-11-1999.  
 4 - La prochaine date avec des chiffres tous impairs : 11-11-3111.  
 5 - La dernière date avec des chiffres tous pairs : 28-08-2006.  
 6 - La prochaine date avec des chiffres tous pairs : 02-02-2008.

## Exercice n° 5 (Séries ES, L, SMS, STG)

### Enoncé

#### Les amoureux

Roméo et Juliette sont sur le point de divorcer mais ils veulent dans un dernier sursaut essayer de sauver leur couple. Ils décident d'aller en Italie sur les traces des amants de Venise et des amoureux de Vérone mais malheureusement leurs relations s'enveniment et sur le conseil d'un ami ils décident de se rendre à San Remo pour se séparer. Sauriez-vous trouver quel chiffre associer à chaque lettre pour permettre l'addition ci-dessous ?

$$\begin{array}{rcccccc}
 & V & E & R & O & N & E \\
 + & V & E & N & I & S & E \\
 \hline
 S & A & N & R & E & M & O
 \end{array}$$

Une lettre représente toujours un même chiffre. Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents.

### Solution

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
|   | V | E | R | O | N | E |
| + | V | E | N | I | S | E |
| S | A | N | R | E | M | O |

Pour des raisons de retenue  $S=1$  et pour que  $S=1$  il faut que  $V \geq 5$  car  $V \leq 4$  implique  $A \leq 9$  et par conséquent l'absence de retenue.

Comme chaque lettre correspond à un chiffre de façon unique  $N \neq O$  et donc la retenue de 4 vers 3 implique  $N = O + 1$ .

D'autre part là encore pour des raisons de retenue et parce que  $N \neq 0$  on a nécessairement  $N = 9$ , d'où  $O = 8$  et  $E = 4$  d'où  $M = 0$  puis  $I = 5$ .

Pour  $V$  *a priori* on peut choisir 5, 6 ou 7 et on voit que seul peut convenir  $V = 6$  d'où  $A = 2$ . Enfin pour R on peut choisir entre les chiffres restants 3 et 7 et les deux conviennent.

## Exercice n° 6 (Séries ES, L)

### Enoncé

#### Le KERNO

Yann vient de gagner au Kerno, un jeu de la Bigoudenne des jeux, une somme entière très importante. Celle-ci commence par le chiffre 7. A la crêperie du port où il est venu fêter son succès, il rencontre son ami Denez, un amoureux des chiffres, qui lui dit : « *Gast, petit gars, tu as eu de la chance ! Si le 7 avait été déplacé à la fin du nombre tu aurais eu une somme cinq fois plus petite* ». Trouvez la plus petite somme vérifiant cette propriété. En existe-t-il d'autres ?

### Solution

Supposons que le montant  $S$  s'écrive sous la forme  $\overline{7a_1a_2\dots a_n}$ , où  $a_i$  est un chiffre, et  $n+1$  le nombre de chiffres, le premier étant par hypothèse 7.

On a alors  $\overline{7a_1a_2\dots a_n} = 5 \times \overline{a_1a_2\dots a_n7}$  d'où  $a_n = 5$  car  $7 \times 5 = 35$ . On obtient alors une égalité :  $\overline{7a_1a_2\dots a_{n-1}5} = 5 \times \overline{a_1a_2\dots 57}$  et compte tenu de l'égalité  $57 \times 5 = 285$  il vient :  $a_{n-1} = 8$ . On répète cette opération jusqu'à obtenir la première fois 7, il s'agira donc de la plus petite somme. On obtient ainsi  $S = 714\,285$  euros.