

REIMS

Exercice n° 1

Énoncé

Entiers et diviseurs

Quels sont tous les entiers naturels non nuls n'ayant aucun diviseur (autre que 1) inférieur ou égal à $\sqrt{n}$?

Quels sont tous les entiers naturels non nuls n'ayant aucun diviseur (autre que 1) inférieur ou égal à $\sqrt[3]{n}$?

Solution

1. Soit n un entier plus grand que 1.

Si n est premier, n n'admet pas de diviseur autre que 1 qui soit inférieur à $\sqrt{n}$.

Si n n'est pas premier, n peut s'écrire sous la forme $n = pq$, où $1 < p \leq q$. On a $p^2 \leq pq = n$, donc $p \leq \sqrt{n}$ et $p \neq 1$.

Les seuls entiers naturels non nuls n'admettant pas de diviseur autre que 1 inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ sont donc les nombres premiers.

2. On cherche les entiers n'admettant pas de diviseur autre que 1 inférieur ou égal à $\sqrt[3]{n}$. Ceux compris entre 1 et 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59.

Comme précédemment, tous les nombres premiers conviennent.

Si n n'est pas premier, n s'écrit comme produit d'au moins deux nombres premiers autres que 1.

Soit n produit d'exactly deux nombres premiers : $n = pq$, avec $1 < p \leq q$.

Si n convient, alors $n < p^3$, d'où $q < p^2$. Réciproquement, si $1 < p \leq q$, p et q premiers, et $q < p^2$, alors $p^3 > pq$, $q^3 \geq p^3 > pq$, et $n = pq$ n'a pas d'autre diviseur différent de 1 que p et q . Donc n convient.

Soit n produit d'au moins trois nombres premiers : $n = p_1 p_2 p_3 \dots p_k$, avec $1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_k$. Alors $p_1^3 \leq p_1 p_2 p_3 \leq n$, donc n admet un diviseur autre que 1 inférieur ou égal à $\sqrt[3]{n}$.

Les entiers recherchés sont donc les nombres premiers, et les produits pq de deux nombres premiers autres que 1, avec $p \leq q < p^2$.

Exercice n° 2

Énoncé

Logo d'une entreprise

Une entreprise d'outillage créée par n associés veut former un logo pour représenter l'entreprise. Il doit être constitué de n segments de même longueur représentant des clous.

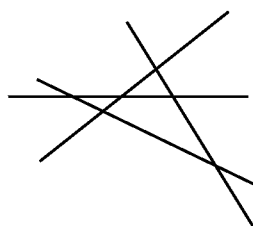
De plus ce logo doit respecter les contraintes suivantes :

- Chaque segment intercepte exactement 3 autres segments.
- Jamais 3 segments ne se coupent au même point.

- 1° Dans le cas où $n = 4$, dessiner un tel logo si c'est possible, sinon expliquer pourquoi.
- 2° Dans le cas où $n = 5$, dessiner un tel logo si c'est possible, sinon expliquer pourquoi.
- 3° Que se passe-t-il pour 6 associés ? 7 associés ?
- 4° Déterminer les conditions sur n pour que l'entreprise puisse créer un tel logo.

Solution

1°

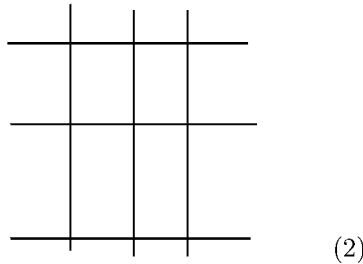


(1)

2° Pour $n = 5$.

Intéressons nous au nombre d'intersections qu'il doit y avoir dans un tel logo. 5 segments qui interceptent chacun trois autres donc $5 \times 3 = 15$ qu'il faut diviser par 2 puisqu'une intersection est formée par deux segments. On obtient 7,5 intersections. Ce nombre n'étant pas un entier, on ne pourra pas construire ce logo.

3° Pour $n = 6$:



(2)

Pour $n = 7$. En utilisant le même raisonnement qu'à la question 2° : On obtient $\frac{7 \times 3}{2} = 10,5$ intersections. Même conclusion qu'au 2°.

4° Pour que chaque segment puisse en intercepter exactement 3 autres, il faut qu'il y ait au moins 4 segments donc $n \geq 5$.

Cas où n est impair :

En utilisant, encore une fois, le même raisonnement qu'à la question 2° :

On obtient $\frac{n \times 3}{2}$ intersections. Or $n \times 3$ est impair donc $\frac{n \times 3}{2}$ n'est pas un nombre entier. On ne peut donc pas construire le logo.

Cas où n est pair et supérieur ou égal à 4 :

Démontrons déjà que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 peut s'écrire sous la forme $4k$ ou $4k + 6$. n étant un entier pair supérieur ou égal à 4 alors il existe un entier $p \geq 2$ tel que $n = 2p$.

- Si p est pair alors il existe un entier k tel que $n = 4k$
- Si p est impair alors il existe un entier $q \geq 1$ tel que $n = 2(2q + 1) = 4(q - 1) + 6 = 4k + 6$.

Maintenant :

Dans le cas où $n = 4k$ il suffit de créer un logo constitué de k symboles identiques au symbole (1)

Dans le cas où $n = 4k + 6$ il suffit de créer un logo constitué de k symboles identiques au symbole (1) auxquels on ajoute le symbole (2).

Conclusion : Il faut et il suffit que n soit un nombre pair supérieur ou égal à 4.