

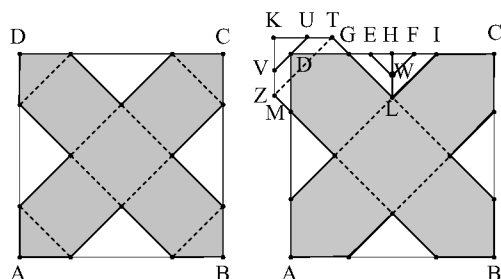
POITIERS

Exercice n° 1

Enoncé

Le patron

On a découpé les parties restées en blanc d'une feuille de carton ABCD, carrée de 12 cm de côté comme indiqué sur la figure à gauche ci-dessous. On a ainsi fabriqué le patron d'un cube. Après pliage selon les pointillés et collage avec du ruban adhésif, quel est le volume du cube obtenu ?



Pour qu'il n'y ait aucune chute de carton, on propose de recoller à l'aide de ruban adhésif les morceaux, pour construire le patron de même forme que le précédent, mais de dimensions plus grandes comme indiqué sur la figure de droite ci-dessus. Les morceaux trapézoïdaux GLWE et ILWF sont déplacés et recollés en DGTU et DMZV, les morceaux triangulaires HWE et HWF sont déplacés et recollés en DUK et DVK. On opère de même avec les 3 autres chutes de cartons, afin d'obtenir ainsi le cube le plus volumineux possible. Quel est le volume maximum ainsi obtenu ?

Solution

Soit a la longueur d'un des côtés du petit carré ou de l'arête du cube.

On a $12 = AB = 2a\sqrt{2}$ où $a = 3\sqrt{2}$

et le volume du cube est $a^3 = 54\sqrt{2} \approx 76,37 \text{ cm}^3$.

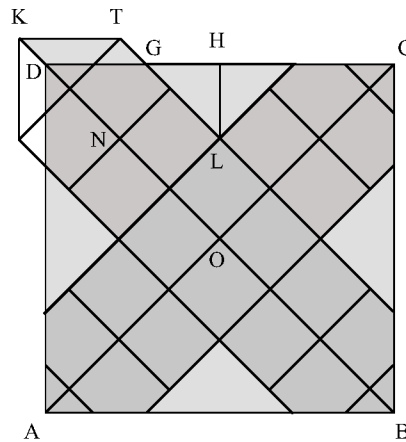
On peut aussi écrire $12\sqrt{12} = AC = 4a$ d'où $a = \frac{12\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2}$.

Si maintenant on utilise toutes les chutes, la surface de chaque face du cube est $\frac{12^2}{6} = 24$ et la longueur d'une arête $a' = \sqrt{24} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \approx 4,899$. Le nouveau cube a donc un volume $a'^3 = 48\sqrt{6} \approx 117,58 \text{ cm}^3$.

L'énoncé ne demandait pas aux élèves de vérifier la construction proposée or celle-ci n'est qu'approximative. En effet, $DG = KT = \frac{a'\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3,464$, alors que $GL = GH\sqrt{2} = (6 - 2\sqrt{3})\sqrt{2} \approx 3,589$.

Pierre Jullien donne pour sa part un découpage exact.

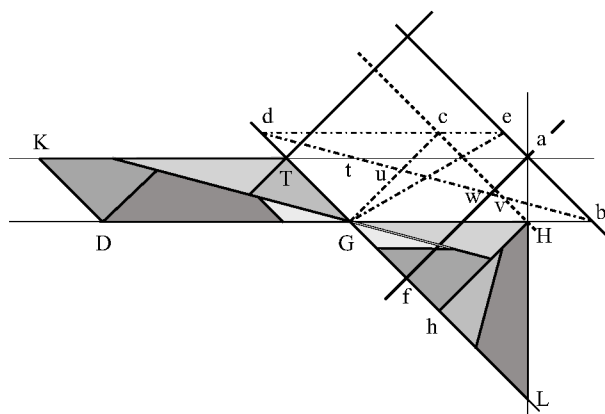
Pour se simplifier la tâche, il est commode de prendre pour unité de longueur et d'aire celles d'un petit carré de la figure ci-dessous.



En respectant les notations de l'énoncé, il s'agit de découper le parallélogramme $DGTK$ pour recouvrir le triangle GHL .

La croix qui correspond au cube à reconstituer a pour aire 24. Donc le carré $ABCD$ a aussi pour aire 24 et OD a pour mesure $2\sqrt{3}$. On note $OD = 2\sqrt{3}$. Il vient alors : $KT = DG = \sqrt{2}$; $KD = TG = 4 - 2\sqrt{3}$; $\text{aire}(DGTK) = 4 - 2\sqrt{3}$. De même : $GL = ND = 2\sqrt{3} - 2$; $\text{aire}(GHL) = \frac{GL^2}{4} = (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. Nous n'avons pas la chance que $GL = DG$, bien que voisines à 3,5% ; 1,464 et 1,414.

On peut découper le parallélogramme $DGTK$ et le triangle GHL en cinq morceaux de la manière suivante :

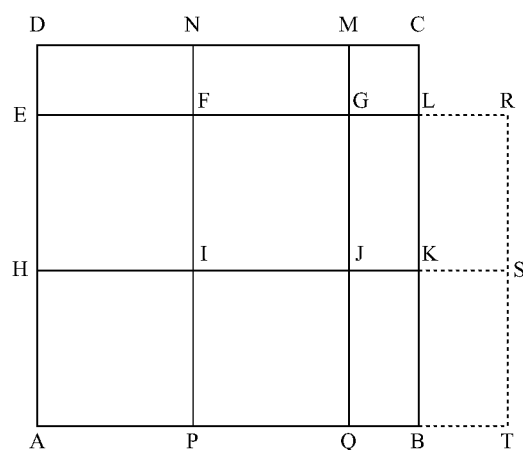


Le triangle Gcd est translaté du triangle hHG et le triangle HcG est l'image par un quart de tour de centre H du triangle HhL .

Ainsi le parallélogramme $GdcH$ a même aire que le parallélogramme $GTab$ (translaté de $DKTG$). De ce fait, les trois segments $[Ge]$, $[Ta]$, $[Hc]$ sont concourants. Ils se coupent en g . La diagonale $[db]$ coupe $[Ka]$ en t ; $[Gc]$ en u et $[af]$ en w .

On constate les égalités des triangles tab et dcv ainsi que Tdt et Hvb . D'où le découpage du parallélogramme $GHcd$ en cinq pièces : $GTtu$; $GuvH$; duc ; Tdt ; ucv . Elles recouvrent respectivement $GTtu$, $GuvH$, tva , wab et Hvb pour reconstituer $Gtab$. De même elles recouvrent le triangle GHL en tournant d'un quart de tour les pièces  et .

De son côté, **Paul-Louis Hennequin** propose un découpage qui nécessite seulement la dissection de deux faces du cube :



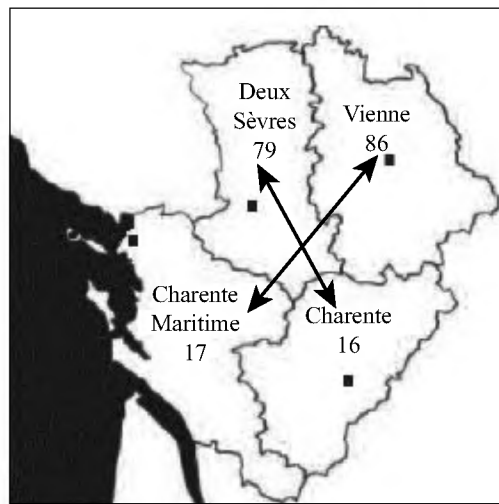
On découpe d'abord les quatre faces carrées de côté a' : $EFIH$, $FGJI$, $HIPA$ et $IJQP$.

On dissèque ensuite le rectangle $DCLE$ en le rectangle $LRTB$ en utilisant la méthode proposée par Pierre Jullien dans l'exercice n° 4 de Nantes (page 134).

Exercice n° 2

Énoncé

Une somme déterminante



Les numéros des quatre départements de la région Poitou-Charentes sont liés ensemble par une relation qui peut sembler étonnante. Observez plutôt :

$$16 + 17 + 79 + 86 = 86 \times 17 - 79 \times 16.$$

La relation :

$$a + b + c + d = db - ca \quad \text{avec} \quad a < b < c < d \quad (1)$$

entre les numéros de quatre départements est-elle exceptionnelle ?

Pour les besoins de l'exercice vous conviendrez de la numérotation fantaisiste suivante : 20 (Corse du Sud); 96 (Haute Corse); 97 (Guadeloupe); 98 (Martinique); 99 (Guyane); 100 (Réunion). Ainsi vous disposerez des 100 départements français numérotés de 1 à 100.

- Donner quatre autres numéros de département vérifiant la relation (1) et produisant de plus exactement le même résultat que la région Poitou-Charentes à savoir 198.
- La relation (1) peut-elle produire un résultat impair ?

- c) Au total, combien peut-on former de groupes de quatre départements vérifiant la relation (1) ?

Solution 1

- a) Un exemple parmi d'autres : $1 + 3 + 96 + 98 = 98 \times 3 - 96 \times 1 = 198$
 b) Un exemple parmi d'autres : $1 + 2 + 3 + 9 = 9 \times 2 - 1 \times 3 = 15$.
 c) L'équation (1) peut se factoriser sous la forme : $(a+1)(c+1) = (d-1)(b-1)$.
 On simplifie cette équation en posant $A = a+1, B = b-1, C = c+1$ et $D = d-1$.
 Il s'agit alors de trouver quatre entiers A, B, C et D tels que : $AC = BD$ avec $2 \leq A < B + 2 < C < D + 2$ et $D \leq 99$.
 Il y a trois cas à étudier.

- ▷ Si $A < B$ alors $C > D$, ce qui se traduit par $c = d-1$. Ceci est impossible, car on aurait $d(a+1) = (b-1)(d-1)$, d diviserait $(b-1)$ ce qui est impossible car $d > b$.

- ▷ On a ensuite l'équivalence suivante : $A = B \Leftrightarrow C = D$. Il s'agit alors de compter le nombre de couples d'entiers (A, k) tels que :
 $2 \leq A < A + 2 + k \leq 99$ avec $k \geq 1$.

Il y a 4560 couples qui répondent aux contraintes de ce cas de figure et donc autant de quadruplets (a, b, c, d) solutions de l'équation (1).

- ▷ Pour finir, il reste à examiner le cas où $A = B + 1$.
 L'équation $AC = (A-1)D$ avec ses contraintes sur A, B, C et D se traduit alors par $2 \leq A < A + 1 < k(A-1) < kA + 2$ et $kA \leq 99$ avec $k \geq 1$.
 Cela se résume en : $2 \leq A \leq \frac{99}{k}$ et $k > \frac{A+1}{A-1}$.
 Pour $A = 2$, on a $4 \leq k \leq 49$ (46 solutions).
 Pour $A = 3$, on a $3 \leq k \leq 33$ (31 solutions).
 Pour $A \geq 4$, on doit avoir : $2 \leq k \leq \frac{99}{A}$. L'entier A ne peut donc excéder 49. On compte, pour chaque entier A compris entre 4 et 49, le nombre de valeurs de k qui réalisent l'inégalité. On aboutit à un total de 196. Il y a au total 273 couples (A, k) solutions des deux inégalités et donc autant de quadruplets (a, b, c, d) solutions de l'équation (1).

Soit un total de 4833 quadruplets (a, b, c, d) possibles.

Solution 2 (avec calculatrice – A.Guillemot)

- a) La réponse à cette question peut être obtenue par programmation par balayage systématique. Pour permettre d'obtenir le résultat plus rapidement, on ne fera pas de boucle sur la variable D .

relation (1) s'écrit alors $d(a+1) = (b-1)(d-1)$.

Comme d et $(d-1)$ sont premiers entre eux, d divise donc $(b-1)$, ce qui est impossible car $d > b$.

Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

2^{ème} cas : $a+1 = b-1$

Ce qui entraîne que $c+1 = d-1$. On a donc $b = a+2$ et $d = c+2$ avec la contrainte $a < b < c < d$ pour des nombres compris entre 1 et 100, a va pouvoir prendre toutes les valeurs entre 1 et 95. Pour $a = 1$, il y a 95 valeurs possibles de c : de 4 à 98. Pour $a = 2$, il y a 94 valeurs possibles de c : de 5 à 98 etc.

Dans ce cas il y a $95 + 94 + 93 + 92 + \dots + 1 = 4560$ solutions.

3^{ème} cas : $a+1 > b-1$

Comme $a < b$ on a $b = a+1$. La relation (1) s'écrit : $(a+1)(c+1) = a(d-1)$.

Comme a et $(a+1)$ sont premiers entre eux, $(a+1)$ divise $(d-1)$, ce qui permet d'avoir le programme suivant qui donnera le nombre de possibilités dans un temps raisonnable.

<pre>PROGRAM:POIT3 :0→N :For(A,1,97) :For(C,A+2,99) :For(K,2,99/(A+1)) :) : A+1→B : K*(A+1)+1→D</pre>	<pre>PROGRAM:POIT3 :A+B+C+D→T :If T=B*D-A*C :N+1→N :End :End :End :Disp N</pre>
---	---

```
PrgrMPOIT3
273
Done
```

Dans ce cas il y a 273 solutions.

En conclusion il y a 4833 solutions au problème.