

PARIS

Exercice n° 1 (Sections autres que S)

Enoncé

Un cercle de rayon 1 est inscrit dans un triangle équilatéral ABC . Les points D et E sont tels que $BCDE$ soit un rectangle, le point A étant le milieu de $[DE]$. Quel est le diamètre du cercle passant par les points B, C, D et E ?

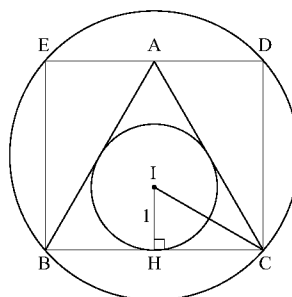
Solution (Paul-Louis Hennequin)

$$HC = 1 \times \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$BC = 2\sqrt{3}, \quad AH = DC = HC \times \tan \frac{\pi}{3} = 3$$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 12 + 9 = 21$$

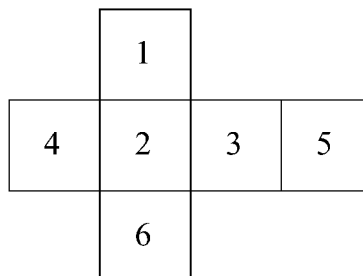
$$\text{d'où } BD = \sqrt{21} = \sqrt{3}\sqrt{7} \approx 4,6.$$



Exercice n° 2 (Sections autres que S)

Enoncé

On superpose n dés (n entier naturel non nul) identiques dont un patron est donné ci-dessous et on calcule la somme des points marqués sur toutes les faces visibles de la pile.



On remarque qu'en posant le dernier dé de la pile,

- si la face supérieure est 1, la somme est un nombre premier,
- si la face supérieure est 2, la somme est un multiple de 2,
- si la face supérieure est 3, la somme est un multiple de 3,
- si la face supérieure est 4, la somme est un multiple de 4,
- si la face supérieure est 5, la somme est un multiple de 5,
- si la face supérieure est 6, la somme est un multiple de 6.

Quelle est la plus petite valeur de n possible ? (On pourra se servir de la liste suivante) :

Liste des nombres premiers compris entre 1 et 1000

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Solution

Soit n ($n \in \mathbb{N}$) le nombre de dés superposés. La somme S des points indiqués sur toutes les faces visibles des dés est : $S = 14 \times n + a$ où a représente les points de la face supérieure de la pile.

- Si $a = 2$, alors $S = 14 \times n + 2 = 2(7 \times n + 1)$, donc S est paire.
- Si $a = 3$, alors $S = 14 \times n + 3$. S est multiple de trois si on peut mettre 3 en facteur, donc si n est multiple de 3.
- Si $a = 4$, alors $S = 14 \times n + 4$. S est multiple de quatre si on peut mettre 4 en facteur, donc si n est multiple de 2.
- Si $a = 5$, alors $S = 14 \times n + 5$. S est multiple de cinq si on peut mettre 5 en facteur, donc si n est multiple de 5.
- Si $a = 6$, alors $S = 14 \times n + 6$. S est multiple de six si on peut mettre 6 en facteur, donc si n est multiple de 3.
- Si $n = 2 \times 3 \times 5 = 30$, alors S vérifie les conditions précédentes et on constate que, si $a = 1$, alors $S = 421$ est premier. On peut vérifier que, si n est inférieur à 30, alors l'une au moins des conditions imposées n'est pas vérifiée.

Exercice n° 3 (Section S)

Enoncé

Le but de l'exercice est de démontrer que si m est un entier naturel non nul, il existe un entier M multiple de m , tel que l'écriture de l'entier M comporte de gauche à droite une succession de 9 suivie ou non d'une succession de 0.

Le nombre M sera par exemple égal à 9 ou 99 ou 90 ou 999900, ...

1. Vérifier cette propriété pour les entiers m compris entre 1 et 6.
2. Déterminer un entier M répondant à la question dans le cas où $m = 7$.

(Indication : on pourra chercher l'écriture décimale du nombre $\frac{1}{7}10^6 - \frac{1}{7}$).

3. Déterminer un entier M répondant à la question dans le cas où $m = 84$.
4. Démontrer la propriété dans le cas d'un entier naturel non nul quelconque m .

Solution 1

1. 9 est un multiple de 1.
90 est un multiple de 2.
9 est un multiple de 3.
900 est un multiple de 4.
90 est un multiple de 5.
990 est un multiple de 6.

2. Cas $m = 7$.

La calculatrice donne $a = \frac{1}{m} = \frac{1}{7} = 0, \underbrace{142857}_{142857}$.

On a $10^6 a - a = 142857$, d'où

$$999999a = 142857$$

$$999999 = 7 \times 142857$$

D'où 999999 est un multiple de 7.

3. Cas $m = 84$.

Procédons de la même manière.

La calculatrice donne $a = \frac{1}{m} = 0.01 \underbrace{190476}_{190476} 1905$. Calculons

$$10^6 (10^2 a - 1) = 190476 + [10^2 a - 1]$$

d'où

$$10^2 a - 1 = \frac{190476}{10^6 - 1}$$

$$a = \frac{1}{84} = \frac{190476 + (10^6 - 1)}{10^2(10^6 - 1)}$$

$$84[190476 + (10^6 - 1)] = 99999900.$$

Donc 84 divise 99999900.

4. Cas général

Soit m un entier naturel non nul. Le nombre $\frac{1}{m}$ admet une écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang. En effet quand on effectue la division, les restes successifs prennent au plus m valeurs : les entiers de 0 à $m-1$.

1^{er} cas : si l'un des restes est nul, l'écriture décimale de $\frac{1}{m}$ ne comporte que des zéros à partir d'un certain rang.

Supposons que les décimales soient nulles à partir du rang $p+1$. Le nombre $\frac{1}{m} \times 10^p$ est un nombre entier A .

On a alors $m \times A = 10^p$ d'où $m \times A \times 9 = 10^p \times 9$. Le nombre m divise $M = 9 \times 10^p$.

2^{ème} cas : si aucun des restes n'est nul, la partie décimale étant périodique à partir d'un certain rang, il existe donc un entier p non nul tel que

$$\frac{1}{m} = 0, b_1 b_2 \dots b_n \underbrace{a_1 \dots a_p}_{\text{période}} a_1 \dots a_p \dots$$

D'où en procédant comme dans le cas où $m = 84$, on a en posant $a = \frac{1}{m}$:

$$10^p [10^n a - \overline{b_1 b_2 \dots b_n}] = \overline{a_1 \dots a_p} + 0, \underbrace{a_1 \dots a_p}_{\text{période}} a_1 \dots a_p \dots$$

Posons $A = \overline{a_1 \dots a_p}$ et $B = b_1 b_2 \dots b_n$, on a

$$\begin{aligned} 10^p [10^n a - B] &= A + 0, \underbrace{a_1 \dots a_p}_{\text{période}} a_1 \dots a_p \dots \\ &= A + [10^n a - B] \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (10^p - 1)[10^n a - B] &= A \\ 10^n a - B &= \frac{A}{10^p - 1} \\ 10^n a &= B + \frac{A}{10^p - 1} \\ 10^n a &= A + \frac{B(10^p - 1)}{10^p - 1} \\ a &= \frac{A + B(10^p - 1)}{10^n(10^p - 1)} \\ \frac{1}{m} &= \frac{A + B(10^p - 1)}{10^n(10^p - 1)} \\ 10^n(10^p - 1) &= m[A + B(10^p - 1)] \end{aligned}$$

Le nombre $A + B(10^p - 1)$ est un nombre entier, donc m divise $10^n(10^p - 1)$ qui est un entier qui s'écrit sous la forme de $p \ll 9 \gg$ suivis de $n \ll 0 \gg$.

Solution 2 (Dominique Roux)

Considérons les $m + 1$ nombres :

9, 99, 999, ..., 99...99 comportant
1 2 3 ... $m + 1$ chiffres 9

Par le principe des tiroirs, deux d'entre eux, au moins, sont égaux modulo 9, soit $i = \underbrace{9 \dots 9}_i$ et $j = \underbrace{9 \dots 9}_j$.

Si i est le plus grand, $i - j \equiv 0 \pmod{m}$ donc $i - j$ est multiple de m .

Mais $i - j = \underbrace{9 \dots 9}_{i-j} \underbrace{0 \dots 0}_j$.

Exercice n° 4 (Section S)

Enoncé

1. Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que les droites (AB) et (CD) soient strictement parallèles et tels que $AB \neq CD$. Montrer que l'on peut construire uniquement à l'aide d'une règle non graduée le milieu O du segment $[AB]$. Faire la construction demandée sur la figure proposée en annexe 1 qui sera rendue avec la copie.
2. Soit A et B deux points distincts du plan, O le milieu du segment $[AB]$ et E un point quelconque du plan. Montrer que l'on peut construire uniquement à l'aide d'une règle non graduée une parallèle à la droite (AB) passant par E . Faire la construction demandée sur la figure proposée en annexe 2 qui sera rendue avec la copie.
3. Soit O un point du plan et r un réel strictement positif, Γ le cercle de centre O et de rayon r , $[AB]$ un diamètre du cercle Γ . Montrer que l'on peut construire uniquement à l'aide d'une règle non graduée le symétrique B_1 de B par rapport à A . Faire la construction demandée sur la figure proposée en annexe 3 qui sera rendue avec la copie.

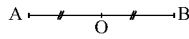
ANNEXE 1

C ————— D

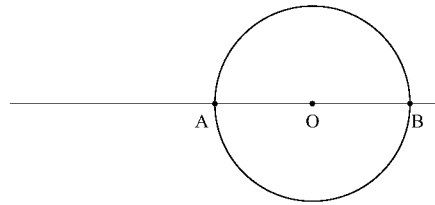
A ————— B

ANNEXE 2

•E



ANNEXE 3



Solution

1. Le quadrilatère $(ABCD)$ n'est pas un parallélogramme, c'est un trapèze. Soit I (resp. J) le point d'intersection des droites (AD) et (BC) (resp. (AC) et (BD)). La droite (IJ) coupe (CD) en M et (AB) en O . D'après le théorème de Thalès, on a

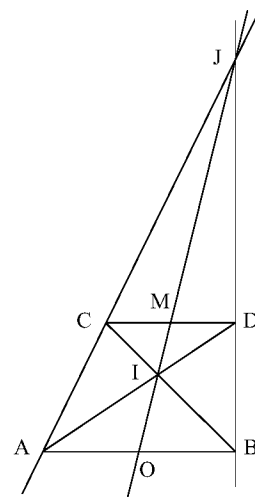
$$\frac{JC}{JA} = \frac{JM}{JO} = \frac{JD}{JB} = \frac{CM}{AO} = \frac{MD}{OB}$$

$$\frac{IC}{IB} = \frac{ID}{IA} = \frac{IM}{IO} = \frac{CM}{OB} = \frac{MD}{OA}$$

Des premières égalités, on tire $\frac{MC}{MD} = \frac{OA}{OB}$ et des

deuxièmes $\frac{MC}{MD} = \frac{OB}{OA}$, d'où $\frac{MC}{MD} = \frac{MD}{MC}$

soit $MC^2 = MD^2$ et donc $MD = MC$. Le point M est le milieu de $[CD]$, le point O est le milieu de $[AB]$.



2. Le point O est le milieu de $[AB]$ avec $A \neq B$.

1^{er} cas : le point E appartient à la droite (AB) , la parallèle à (AB) passant E est la droite (AB) .

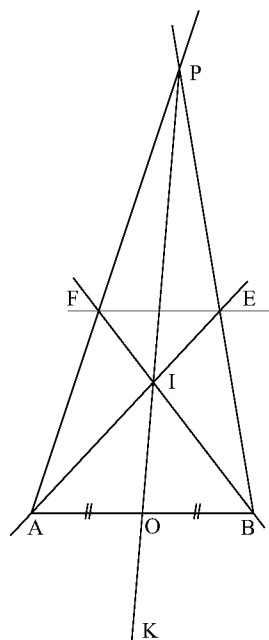
2^{ème} cas : le point E n'appartient pas à la droite (AB) ,

- on trace la droite (BE) et on choisit sur la demi-droite $[BE)$ un point P n'appartenant pas au segment $[BE]$,
- on trace les droites (AP) , (AE) et (PO) . Soit I le point d'intersection des droites (PO) et (AE) , F le point d'intersection des droites (BI) et (AP) ,
- montrons que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
 - Soit K le symétrique de I par rapport à O , le quadrilatère $(AKBI)$ est un parallélogramme, donc les droites (BF) et (AK) sont parallèles ainsi que les droites (AE) et (BK) .
 - D'après le théorème de Thalès

$$\frac{PF}{PA} = \frac{PI}{PK} = \frac{PE}{PB}$$

- En utilisant le théorème réciproque du théorème de Thalès

$$\frac{PF}{PA} = \frac{PE}{PB} \text{ donc les droites } (FE) \text{ et } (AB) \text{ sont parallèles.}$$



3. a) Soit E un point du plan, P un point de $[BE)$ n'appartenant pas au segment $[BE]$, on mène par E la parallèle (D) à (AB) , soit F le point d'intersection de (D) et de (AP) . Le point I intersection des droites (PO) et (EF)

est le milieu de $[EF]$.

b) La droite (BI) coupe (FO) en P_1 . La droite (AP_1) coupe (EF) en J . On a $EI = IF = FJ$.

c) Soit P_2 le point d'intersection des droites (BF) et (OJ) et K le point d'intersection des droites (AP_2) et (EF) . On a $EI = IF = FJ = JK$.

d) La droite (PK) coupe (AB) en B_1 symétrique de B par rapport à A (le point F est le milieu de $[EK]$ et on applique le théorème de Thalès)

