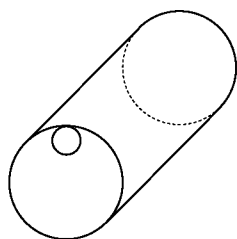


ORLÉANS

Exercice n° 1

Enoncé

Le bidon



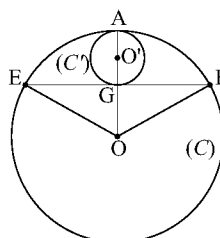
Un bidon de 1000 litres est de forme cylindrique. Ses bases sont deux disques de rayon R et l'une d'entre elles est pourvue d'un orifice circulaire de rayon $\frac{R}{4}$ tangent au cercle. Cet orifice doit être fermé par un bouchon, mais celui-ci est égaré. Le bidon contient 800 litres de fuel. Son propriétaire souhaite, pour des raisons de commodité, stocker le bidon en position horizontale (Cf. fig.) Pourra-t-il le faire sans retirer de fuel du bidon ?

Solution succincte

Notons H la hauteur du bidon exprimée en mètres.

On a donc $1 \text{ m}^3 = H \times \pi \times R^2$.

Sur la figure ci-contre, on a représenté le disque (C) de centre O et de rayon R représentant la base du cylindre, ainsi que le trou circulaire C' de centre O' et de rayon $R/4$, tangent en A au disque. La droite (OA) rencontre C' en G . La droite (EF) est tangente en G à C' .



Le volume maximal que peut contenir le bidon en position horizontale est égal au produit $H \times S$ où S est l'aire de la portion de disque située en dessous de la droite (EF) : en effet, il s'agit de positionner le disque C' le plus haut possible, ce qui revient à placer le point A à la verticale de O .

Reste à calculer S ...

$$\cos \widehat{AOF} = \frac{1}{2} \text{ donc } \widehat{AOF} = 60^\circ.$$

L'aire du secteur angulaire saillant $\widehat{FOE}$ du disque $\mathcal{C}$ est donc égale à

$$\pi R^2 \frac{120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

L'aire du triangle OFE est égale à :

$$\frac{1}{2} \times EF \times OG = \frac{1}{2} \times \left(2 \frac{\sqrt{3}}{2} R \right) \times \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3} R^2}{4}.$$

Donc

$$S = \pi R^2 - \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \right) = \frac{2\pi R^2}{3} + \frac{\sqrt{3} R^2}{4}$$

finalement le volume maximal de liquide susceptible de rester dans le bidon est égal à

$$\begin{aligned} H \left(\frac{2\pi R^2}{3} + \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \right) &= H \times \pi R^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \\ &= 0,8045 \dots \text{m}^3 > 0,8 \end{aligned}$$

Conclusion : il est effectivement possible de stocker le bidon en position horizontale sans retirer de fuel du bidon.

Exercice n° 2

Enoncé

Au quatrième top

Pour me repérer et savoir l'heure, j'ai à ma disposition trois possibilités :

- La radio qui me donne l'heure " vraie ".
- Ma montre dont le mécanisme est très régulier qui affiche les heures, les minutes et les secondes, et dont la vitesse de rotation des aiguilles est constante : en d'autres termes une seconde de ma montre correspond toujours à la même durée exprimée en « secondes vraies ». Je lui fais confiance et ne la règle jamais.
- Une vieille horloge dont les aiguilles ont un mouvement régulier par 24 heures (de 7 heures du matin jusqu'à 7 heures le lendemain au moment où je la remonte) : en d'autres termes une seconde de mon horloge correspond toujours à la même durée exprimée en « secondes vraies » sur une période de 24 heures, mais cette durée peut être différente d'un jour à l'autre. Elle ne me donne pas l'heure exacte, mais elle ne s'en éloigne jamais trop.

Le premier avril au matin, lorsque l'horloge affiche 8 heures, ma montre indique 8h03. Lorsqu'à la radio, il est annoncé 12h, l'horloge, elle, affiche 11 heures 55. Et ce soir-là, je vérifie qu'à 18 h à l'horloge, ma montre indique 17h59.

1. a) Montrer que lorsqu' à l'horloge une heure passe, il s'écoule 59 min 36 s sur ma montre.

b) Lorsque la radio annonce midi, quelle heure est marquée sur ma montre ?

Le 7 avril à 9 h du matin à l'horloge, il est 8h55 à ma montre. Dans la soirée l'horloge affiche 19 h lorsque ma montre donne 18h 59. Ce soir là, en écoutant la radio je remarque qu'à 22 heures précises, l'horloge marque 22h 05.

2. Quelle heure affiche ma montre le sept avril, lorsque la radio annonce 22 heures ?

3. Comment saurais-je repérer très exactement midi le 8 avril à ma montre, sans écouter la radio ?

Eléments de réponse

Date	radio	horloge	montre
1 ^{er} avril		8h	8h03
		9 h	9 h 02 min 36 s
	12 h	11 h 55	11 h 56 min 26 s
		18 h	17 h 59
7 avril		9 h	8 h 55
		10 h	9 h 55 min 24 s
		19 h	18 h 59
	22 h	22 h 05	22 h 05 min 14 s
8 avril	12 h		12 h 6 min 2 s

1.a) Puisque sur la journée du 1^{er} avril, les mouvements de l'horloge et de la montre sont chacun indépendants, lorsqu'il s'écoule 1 heure à l'horloge, il s'écoule $(17h59 - 8h03) : 10 \text{ h}$ soit $(9h56min) : 10 = 59 \text{ min } 36s$ à ma montre.

1. b) de même quand il s'écoule 3 h 55 min à l'horloge, pour la montre, il s'écoulera $(59min36s) \times (3 \times 60 + 55) : 60 = 233 \text{ min } 26 \text{ s} = 3h \text{ } 53 \text{ min } 26 \text{ s}$. La montre affichera donc $8 \text{ h } 03 + 3 \text{ h } 53 \text{ min } 26 = 11 \text{ h } 56 \text{ min } 26$.

2.a) même raisonnement pour le 7 avril : lorsqu'il s'écoule 10 heures à l'horloge, il s'écoule $(18 \text{ h } 59 - 8 \text{ h } 55) = 10 \text{ h } 04 \text{ min}$ à ma montre donc quand il se passe 1 h à l'horloge, sur ma montre cela donnera $(10 \text{ h } 04) : 10 = 1 \text{ h } 24 \text{ s}$.

b) entre 19 h et 22 h 05, il s'écoule 3 h 05 à l'horloge donc

$(60+24) \times (3 \times 60 + 5) : 60 = 186 \text{ min } 14s$ ou $3h \text{ } 6 \text{ min } 14 \text{ s}$ à ma montre.

La montre marquera donc $18h \text{ } 59 + 3h \text{ } 6 \text{ min } 14s = 22 \text{ h } 05 \text{ min } 14 \text{ s}$.

3. La référence ne peut être que la montre car l'horloge n'a pas un mouvement uniforme du 7 avril midi au 8 avril midi. Pour la radio il s'écoule 6 jours et 10 h donc $(24 \times 6 + 10)$ heures du 1^{er} avril midi au 7 avril 22 h alors que pour la

montre il s'écoule 6 jours et (22 h 05 min 14 s - 11 h 56 min 26 s) soit 6 jours et 10h 08 min 48 s (cela ne peut être à 12 h près car la montre est fiable!) Donc lorsqu'il s'écoulera exactement 7 jours du 1er avril midi au 8 avril midi, sur ma montre il se passera $(6 \times 24 + 10 \text{ h } 8 \text{ min } 48 \text{ s}) \times (7 \times 24) : (6 \times 24 + 10) = 168 \text{ h } 9 \text{ min } 36 \text{ s} = 7 \text{ jours } 9 \text{ min } 36 \text{ s}$.

Ma montre marquera donc **11h 56 min 26s + 9min 36s = 12h 6 min 2s**