

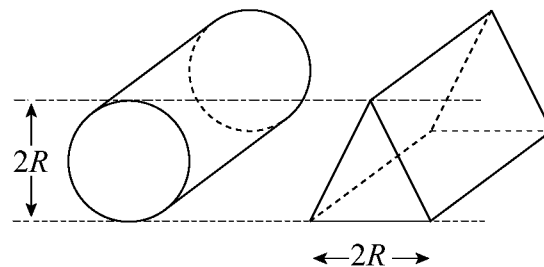
NICE

Exercice n° 1

Énoncé

Un problème de réservoir

Deux réservoirs de même longueur se remplissent d'eau simultanément, avec un robinet de même débit, l'un des réservoirs est cylindrique et l'autre est en forme de prisme droit (voir les dessins en perspective ci-dessous).



Le diamètre du cercle, la base du triangle et sa hauteur sont égaux à $2R$ ($R > 0$). On note h la hauteur d'eau dans le cylindre.

1. Si $h = R$, quelle est la hauteur d'eau (en fonction de R) dans le prisme ? Comparez les deux niveaux.
2. Si $h = \frac{R}{2}$, quelle est la hauteur d'eau (en fonction de R) dans le prisme ? Comparez les deux niveaux.
3. A un instant donné, on a le même niveau h dans les deux réservoirs. Donner un encadrement de h à 0.01.

Solution (Paul-Louis Hennequin)

Soit ℓ la longueur commune des deux réservoirs. Le premier est de volume $\pi R^2 \ell$ et le second de volume $2R^2 \ell$.

Comme $\pi > 2$, c'est le second qui sera plein le premier et la hauteur d'eau dans

le premier sera alors comprise entre R et $2R$.

1. Si $h = R$, le volume d'eau dans chaque réservoir est $\frac{\pi R^2 \ell}{2}$.

Soit h' la hauteur d'eau dans le second, $2R - h'$ est la hauteur d'air restant et on a

$$\frac{\pi R^2 \ell}{2} = 2R^2 \ell - 2 \left(R - \frac{h'}{2} \right)^2 \ell$$

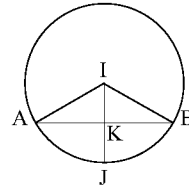
ou $h'^2 - 4Rh' + \pi R^2 = 0$ et $0 \leq h' \leq 2R$

d'où $\frac{h'}{R} = 2 - \sqrt{4 - \pi} \approx 1,074$ donc $h' > R$.

2.

Si $h = \frac{R}{2}$, on a (cf. figure)

$$IK = KJ = \frac{R}{2}$$



d'où (Pythagore) $KA = KB = R \frac{\sqrt{3}}{2}$
 puis $\widehat{KIA} = \widehat{KIB} = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} \text{aire}(\widehat{AJB}) &= \text{aire}(\widehat{AIB}) - \text{aire}(AIB) \\ &= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2. \end{aligned}$$

Le volume d'eau dans chaque réservoir est donc $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2 \ell$.

On a donc maintenant

$$h'^2 - 4Rh' + 2R^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 0$$

$$\text{et } \frac{h'}{R} = 2 \sqrt{4 - 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)} \approx 0,336 < 1.$$

3. D'après la première question, la hauteur commune h est inférieure à R .

Prenons maintenant $KJ = h$ et $\widehat{KIB} = \theta$; on a $\cos \theta = \frac{R-h}{R}$ où $h = R(1 - \cos \theta)$ et les deux volumes d'eau dans chaque réservoir sont $(\theta - \sin \theta \cos \theta) R^2 h$ et $\left(2Rh - \frac{h^2}{2} \right) \ell$

$$\text{on a donc } \theta - \sin \theta \cos \theta = 2(1 - \cos \theta) - \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2}$$

ou
$$\theta = \frac{3}{2} - \cos \theta \left(1 - \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2} \right) = f(\theta)$$

on a
$$1 - \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2} > 0, \text{ d'où } \theta < 1,5.$$

Calculons
$$f(1,5) = 1,4973 < 1,5,$$

et
$$f(1,49) = 1,4965 > 1,49.$$

On en déduit que la fonction continue $x \mapsto x - f(x)$ est > 0 pour $x = 1,5$ et < 0 pour $x = 1,49$, donc qu'elle s'annule en un point θ de l'intervalle $]1,49; 1,5[$. On a donc $1,49 < \theta < 1,5$.

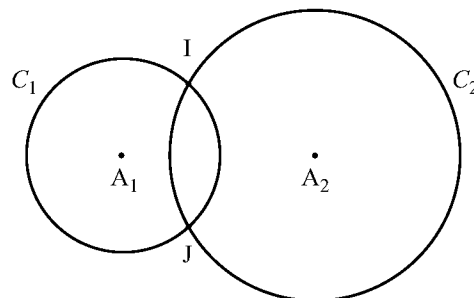
On peut même préciser $1,4965 < \theta < 1,4973$, et comme $\frac{h}{R} = 1 - \cos \theta$, on a $0,9253 < \frac{h}{R} < 0,9262$.

Exercice n° 2

Énoncé

Les lapins

Soit C_1 et C_2 deux cercles sécants de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) et de centres respectifs A_1 et A_2 . On appelle I et J leurs points d'intersection (voir le dessin ci-dessous).



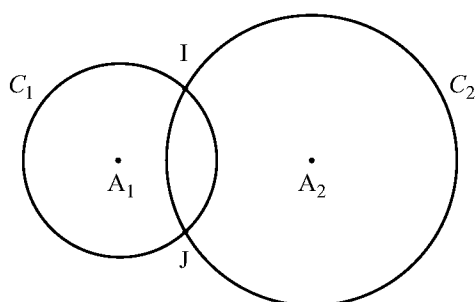
Deux lapins L_1 et L_2 parcourent respectivement C_1 et C_2 dans le même sens (prendre le sens contraire du sens trigonométrique) et avec la même vitesse angulaire. Ils partent en même temps du point I .

1. Dessiner sur l'annexe A la position des deux lapins correspondant à un angle de 45° .
2. Dessiner sur l'annexe B la position de L_2 lorsque L_1 se trouve en J et, en utilisant une autre couleur, la position de L_1 lorsque L_2 se trouve en J . Dans les deux situations, que peut-on dire des triangles $L_1 J L_2$?
3. Montrer que les points L_1 et L_2 sont toujours alignés avec J .
4. Existe-t-il une position de L_2 où J est le milieu de $[L_1, L_2]$? Dans l'affirmative, donner la construction permettant de déterminer les points L_1 et L_2 .

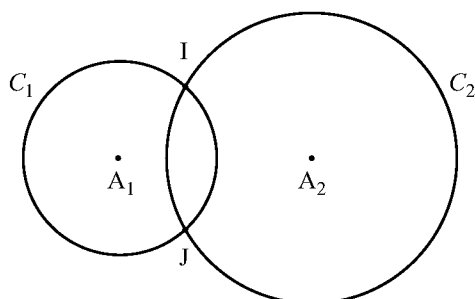
5. Montrer qu'il y a un point fixe du plan qui est, à tout instant, équidistant de L_1 et de L_2 .

(On pourra utilement considérer les points diamétralement opposés à J sur chacun des deux cercles et les noter respectivement J_1 et J_2).

ANNEXE A

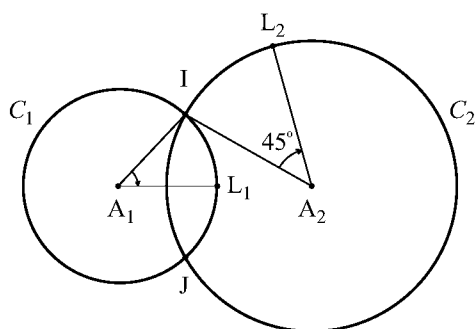


ANNEXE B

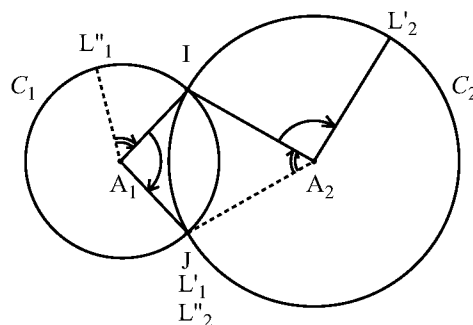


Solution (Paul-Louis Hennequin)

1.



2.



Les triangles $L'_1 J L'_2$ et $L''_1 J L''_2$ ont deux sommets confondus.

3. On a $(\overrightarrow{A_1 I}, \overrightarrow{A_1 L_1}) = (\overrightarrow{A_2 J}, \overrightarrow{A_2 L_2}) + 2k\pi$

on en déduit $((JI), (JL_1)) = ((JI), (JL_2)) + k\pi$.

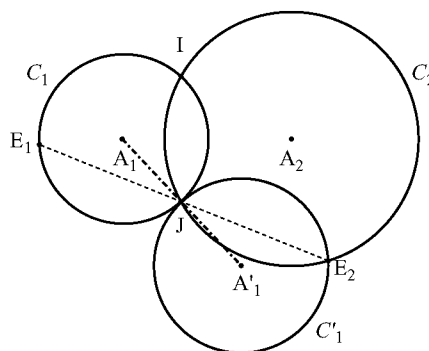
Les droites (JL_1) et (JL_2) sont confondues : L_1 et L_2 sont alignés avec J .

4. Quand L_1 parcourt l'arc (ne contenant pas I) $\widehat{JL''_1}$, L_2 parcourt l'arc $\widehat{L'_2 L'_1}$ (ne contenant pas I). Le rapport $\frac{JL_1}{JL_2}$ varie continuellement de 0 à $+\infty$, il prend donc au moins une fois la valeur 1.

Soit E_1 et E_2 les points correspondants : E_1, J et E_2 sont alignés et $JE_1 = JE_2$. E_2 est donc à la fois sur (C_2) et sur le cercle (C'_1) symétrique de (C_1) par rapport à J . (C'_1) de centre A'_1 coupe (C_2) en J et en un autre point unique et distinct de J : E_2 .

E_1 est alors à l'intersection de (JE_2) et de (C_1) .

On peut aussi construire d'abord E_1 , intersection de (C_1) et du cercle (C'_2) symétrique de (C_2) par rapport à J , puis E_2 .



5. Si un point est équidistant de L_1 et de L_2 , il est sur la médiatrice de $[L_1 L_2]$

Celle-ci est perpendiculaire à $(L_1 L_2)$ et à égale distance des deux perpendiculaires à $(L_1 L_2)$ en L_1 et L_2 .

La première recoupe (C_1) en J_1 diamétralement opposé à J sur (C_1) et de même la seconde recoupe (C_2) en J_2 .

La médiatrice de $[L_1 L_2]$ passe donc par le milieu K de $[J_1 J_2]$ qui ne dépend pas du couple (L_1, L_2) choisi.

