

NANCY-METZ

Recommandations aux candidats :

Il est important d'argumenter les réponses données et de détailler au maximum la démarche mise en œuvre, même si elle n'aboutit pas à la solution complète d'une question. Un résultat partiel peut avoir son intérêt et être valorisé lors de la correction.

Exercice n° 1 (toutes séries)

Enoncé

L'aquarium

Un aquarium posé sur une table a la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 30 cm.

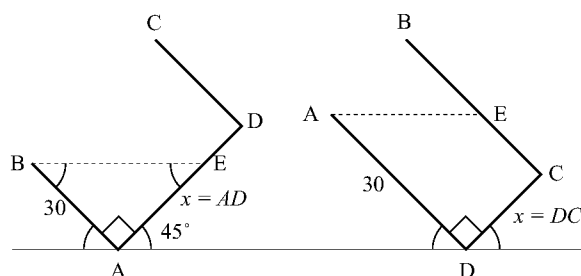
On le remplit d'eau à ras bord, puis on le fait pivoter autour d'une des arêtes de la base, jusqu'à ce que le fond fasse un angle de 45° avec le plan de la table. Un tiers de son contenu se répand alors sur la table.

On le remplit à nouveau à ras bord, puis on le fait pivoter autour d'une autre arête de la base, jusqu'à ce que le fond fasse à nouveau un angle de 45° avec le plan de la table. Les quatre cinquièmes de son contenu se répandent alors sur la table. Quel est le volume de l'aquarium ?

Solution

Notons x, y et h les dimensions de l'aquarium en cm, $h = 30$ cm.

Remarque : On a représenté la face $ABCD$ de l'aquarium de dimension, en cm, x et 30. Dans chaque position, le volume d'eau dans l'aquarium est celui d'un prisme droit de hauteur y et de base respectivement ABE et $AECD$. Ce volume est le produit de y et de l'aire de la base.



Préalable 1 : Deux situations peuvent se produire selon que x est supérieur ou inférieur à 30. Dans le premier cas ($x > 30$) : Aire(ABE) < Aire(ABD), donc plus de la moitié de l'eau s'est répandue sur la table.

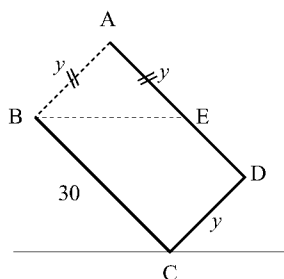
Dans le second ($x < 30$), Aire(ABE) < Aire(ABC), donc moins de la moitié de l'eau s'est répandue.

Préalable 2 : ABE est un triangle rectangle isocèle (angles alternes-internes égaux car la surface de l'eau est parallèle au plan de la table)

- Supposons que lorsque l'on fait pivoter l'aquarium selon une des arêtes de longueur x , un tiers du contenu se répand. D'après le préalable 1, $y < 30$.

$$\text{Aire}(ABE) = \frac{1}{3} \text{Aire}(ABCD)$$

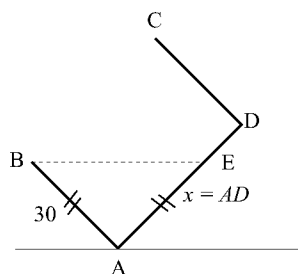
$$\text{soit } \frac{y^2}{2} = \frac{1}{3} \times 30 \times y, \text{ d'où } y = 20.$$



- Si on le fait maintenant pivoter selon une des arêtes de longueur y , quatre cinquièmes de l'eau se répandent, donc, d'après le préalable 1, $x > 30$.

$$\text{Aire}(ABE) = \frac{1}{5} \text{Aire}(ABCD)$$

$$\text{soit } \frac{30^2}{2} = \frac{1}{5} \times 30 \times x, \text{ d'où } x = 75.$$



Finalement, $x = 75$, $y = 20$ et $h = 30$.

Le volume est donc en cm^3 : $V = 75 \times 20 \times 30 = 45\,000$.

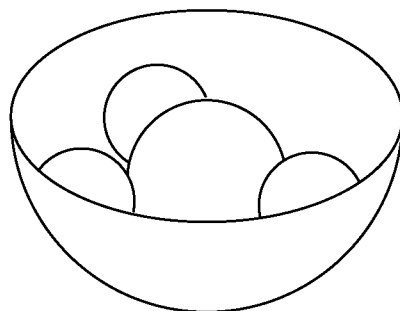
L'aquarium a un volume de **45 litres**.

Exercice n° 2 (série S)

Enoncé

Bol et billes

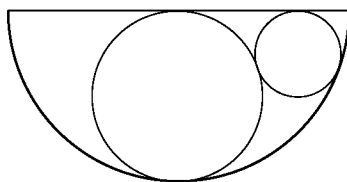
Jean place une grosse bille de rayon R dans un bol hémisphérique de rayon $2R$. Il pose ensuite des petites billes de même rayon autour de la grosse bille de sorte que ces billes touchent à la fois le bol, la grosse bille et affleurent la surface circulaire du bol. On a représenté ci-dessous le bol avec la grosse bille et trois petites billes.



a) Exprimer en fonction de R le rayon des petites billes.

Indications :

On pourra exploiter la figure ci-dessous qui représente une section du bol par un plan vertical contenant le centre de la grosse bille et le centre d'une des petites billes. On rappelle la propriété : si deux sphères (respectivement deux cercles) sont tangentes, alors les centres des sphères (respectivement des cercles) sont alignés avec le point de tangence.

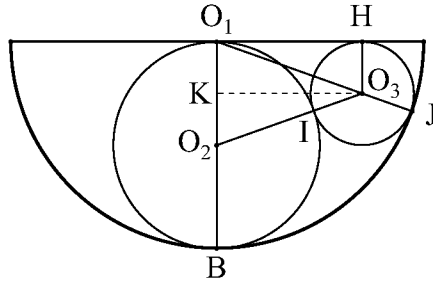


b) Combien Jean peut-il placer au maximum de petites billes dans le bol ?

Solution

Pré-requis :

- Un plan tangent à une sphère (respectivement une droite tangente à un cercle) est perpendiculaire au rayon aboutissant au point de tangence.
- a) On se place dans un plan vertical contenant le centre de la grosse bille et le centre d'un des petites billes.



On appelle O_1, O_2 et O_3 les centres respectifs du bol, de la grosse bille et de la petite bille. On appelle K et H les projetés orthogonaux respectifs du centre de la petite bille sur l'axe du bol et sur la surface circulaire du bol. I, J et B sont les points de tangence respectifs entre la grosse bille et la petite bille, entre la petite bille et le bol et entre la grosse bille et le bol.

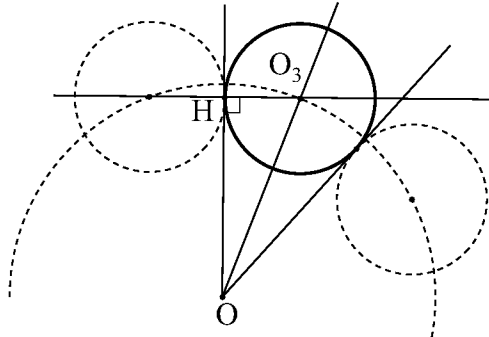
D'après les pré-requis, O_1, O_2 et B sont alignés, ainsi que O_2, I et O_3 et que O_1, O_3 et J .

De plus on a : $O_1B = O_1J = 2R$, $O_1O_2 = O_2I = O_2B = R$, et si on pose r le rayon de la petite bille $O_3I = O_3H = O_3J = r$. Dans le triangle O_2KO_3 rectangle en K on a, d'après le théorème de Pythagore : $O_2O_3^2 = KO_3^2 + O_2K^2$ d'où $(R+r)^2 = KO_3^2 + (R-r)^2$ on en déduit que : $KO_3^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$.

$$KO_3^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$$

Dans le triangle O_1HO_3 rectangle en H on a $O_1O_3^2 = O_1H^2 + O_3H^2$. Comme $KO_3 = O_1H$ et que $O_1O_3 = O_1J - O_3J = 2R - r$, on obtient $(2R-r)^2 = 4Rr + r^2$ puis $4R^2 = 8Rr$ et finalement : $r = \frac{R}{2}$.

b) On se place maintenant dans le plan contenant les centres des petites billes.



Soit O le point d'intersection de l'axe du bol avec ce plan, O_3 le centre d'une petite bille et H le point de tangence de cette bille avec l'une de ses voisines. D'après la question 1) le rayon du cercle passant par les centres des billes est

$$OO_3 = KO_3 = \sqrt{4Rr} = \sqrt{4R \frac{R}{2}} = R\sqrt{2}.$$

On cherche à évaluer l'angle $\widehat{HOO_3}$. Dans le triangle HOO_3 rectangle en H , on a $\sin \widehat{HOO_3} = \frac{HO_3}{OO_3} = \frac{R/2}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

La machine à calculer nous donne alors $\widehat{HOO_3} = 0,361$ rd, en divisant π par ce nombre on trouve alors environ 8,7 ce qui fait que : **Jean ne peut poser au maximum que huit billes.**

Exercice n° 3 (séries L, ES, STI, STL, STG)

Enoncé

Charline et le chocolat

Lundi, la mère de Charline lui a donné une tablette de chocolat rectangulaire constituée de 48 carrés (6×8 carrés).

Charline décide d'en faire profiter ses amies et, à chaque fois qu'elle rencontre une amie, elle lui offre une rangée horizontale ou verticale de ce qui reste de la tablette de chocolat.

Sachant qu'elle garde le dernier carré, à combien d'amies, au maximum, peut-elle offrir du chocolat ?

Mardi, la mère de Charline lui a donné une autre tablette identique à celle de la veille (il ne reste plus rien de la veille).

Charline décide d'en faire encore profiter ses amies, donnant à chaque fois qu'elle rencontre une amie, une rangée horizontale ou verticale de ce qui reste de la tablette mais cette fois ci, elle décide de garder à la fin du partage un morceau de quatre carrés. Combien d'amies, au maximum, pourront profiter de sa gentillesse ?

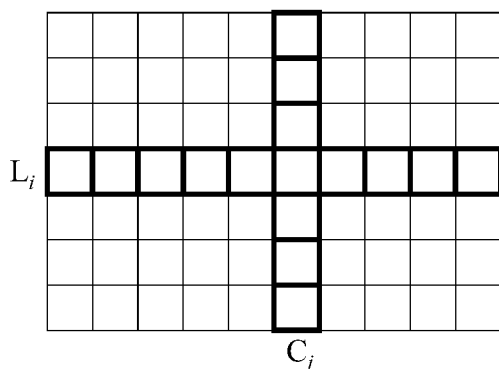
Mercredi, la mère de Charline lui donne une tablette de chocolat rectangulaire constituée de 48 carrés, de dimension 12×4 carrés.

Charline décide d'en faire encore profiter ses amies avec les mêmes modalités de distribution que l'avant-veille, en ne gardant pour elle que le dernier carré. À combien d'amies, au maximum, pourra-t-elle offrir du chocolat aujourd'hui ?

Charline a beaucoup d'amies (surtout depuis qu'elle distribue du chocolat...). Si elle a une tablette de chocolat rectangulaire constituée de $n \times p$ carrés, en offrant à chaque amie rencontrée une rangée horizontale ou verticale de ce qui reste de la tablette de chocolat et en ne gardant que le dernier carré, à combien d'amies pourra-t-elle faire plaisir ?

Solution

On considère une tablette de chocolat rectangulaire constituée de $n \times p$ carrés.



Charline peut décider de laisser le carré de chocolat qu'elle veut. Ce dernier est obligatoirement l'intersection d'une rangée horizontale L_i composée de n carrés et d'une rangée verticale C_j composée de p carrés.

Couper à chaque fois une rangée de la tablette revient à couper un carré de L_i ou de C_j , par conséquent le nombre maximum de coupes possibles est : $(n - 1) + (p - 1) = n + p - 2$.

Ainsi, pour une tablette de chocolat rectangulaire constituée de 48 carrés (6×8 carrés), Charline pourra en faire profiter 12 amies.

Et de la même manière, pour une tablette de 48 carrés (4×12 carrés), elle pourra en faire profiter 14 amies.

Par contre, si Charline décide de garder pour elle les quatre derniers carrés, on remarque qu'il y a deux possibilités, soit elle les garde sous forme d'un carré, soit elle les garde sous forme d'un rectangle.

Pour une tablette de 6×8 carrés :

- dans le premier cas, elle pourra en faire profiter $(8 - 2) + (6 - 2) = 10$ de ses amies
- dans le deuxième cas elle ne pourra en faire profiter que $(8 - 4) + (6 - 1) = (8 - 1) + (6 - 4) = 9$ de ses amies.