

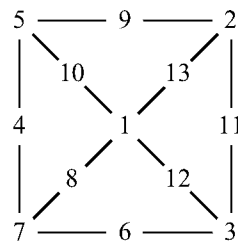
LYON

Exercice n° 1

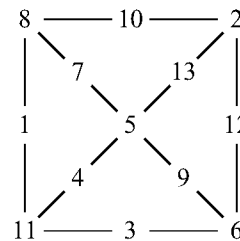
Enoncé

Tableaux de nombres

Dans les deux tableaux ci-dessous figurent tous les nombres entiers naturels de 1 à 13. On considère les quatre triangles ayant comme sommet commun le centre du carré. Les huit sommes des trois nombres placés sur un même côté de chacun de ces triangles sont égales.



dans cet exemple
la somme associée vaut **16**



dans cet exemple
la somme associée vaut **20**

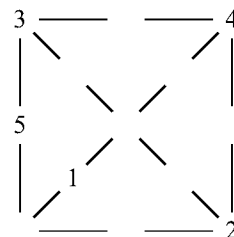
Dans ce problème, on s'intéresse à des tableaux de cette sorte appelés tableaux T .

1.a) Dans le tableau T ci-contre, on a placé 1, 2, 3, 4 et 5. Placez 6 et 7.

(b) Complétez le tableau.

(c) Un tableau T étant donné, on change chaque nombre z de ce tableau en $14 - z$. Obtient-on un tableau T ?

(d) Donnez un tableau T de somme associée 23.



2.a) Le tableau ci-contre est un tableau T . Prouver que :

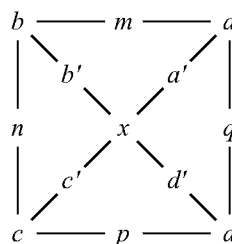
- $m + p = n + q$;
- la somme associée est comprise entre 16 et 26 ;
- le nombre central x est impair.

(b) Dans un tableau T on a $m = 12$, $n = 10$, $q = 13$ et $x = 9$.

Complétez le tableau. Expliquez brièvement votre démarche.

(c) Dans un tableau T , on a $n = 10$ et $q = 13$.

Trouvez m et p (avec $m > p$) puis x . Conclure.



Solution (Paul-Louis Hennequin)

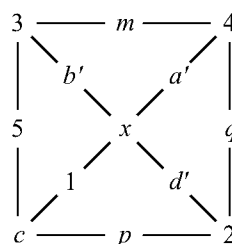
1.(a) On a : $c + 8 = c + p + 2 = c + x + 1$, d'où $p = 6$ et $x = 7$.

(b) On a aussi :

$$c + 8 = 10 + b' = 11 + a' = 9 + d' = m + 7 = q + 6$$

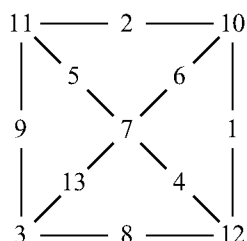
$$\text{ou } q = m + 1 = c + 2 = d' + 3 = b' + 4 = a' + 5.$$

Comme il reste à placer les nombres compris entre 8 et 13, on en déduit : $q = 13$, $m = 12$, $c = 11$, $d' = 10$, $b' = 9$, $a' = 8$ et T est de somme $S = 19$.



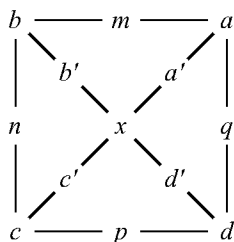
(c) L'application $z \mapsto 14 - z$ est une bijection de $\langle 1, 13 \rangle$ sur lui-même ; de plus, si $z_1 + z_2 + z_3 = S$, $(14 - z_1) + (14 - z_2) + (14 - z_3) = 42 - S$. Donc le nouveau tableau T' est aussi un tableau T de somme $42 - S$.

(d) Si on part du tableau obtenu en (b), on obtient le tableau T' ci-dessous de somme 23.



2(a) On a : $m + a + b = n + b + c$ d'où $m - n = c - a$.

$$p + c + d = a + q + d \text{ d'où } q - p = c - a.$$



On a donc $m - n = q - p$ ou $m + p = q + n$.

On a : $S = a + m + b = b + n + c = c + p + d = d + q + a$

d'où $4S = (m + n + p + q) + 2(a + b + c + d) = M + 2A$

et $S = a + a' + x = b + b' + x = c + c' + x = d + d' + x$

d'où $4S = (a + b + c + d) + (a' + b' + c' + d') + 4x = A + A' + 4x$

d'où, en rajoutant : $8S = M + 3A + A' + 4x = (M + A + A' + x) + 2(x + A) + x$,

et par ailleurs $M + A + A' + x = 1 + 2 + \dots + 12 + 13 = \frac{13 \times 14}{2} = 91$.

D'où $8S = 91 + 2(x + A) + x$

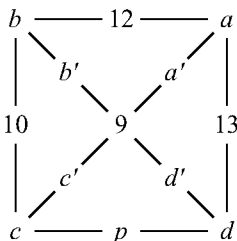
avec $1 \leq x \leq 13$ et $1 + \dots + 5 = 15 \leq x + A \leq 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55$

d'où $122 = 91 + 30 + 1 \leq 8S \leq 91 + 110 + 13 = 214$;

on en déduit : $15,25 = \frac{122}{8} \leq S \leq \frac{214}{8} = 26,75$ et comme S est entier, $16 \leq S \leq 26$.

On a $x = 8S - 91 - 2(x + A)$ donc x est impair.

(b) On a $p = n + q - m = 10 + 13 - 12 = 11$, donc $M = 13 + 12 + 11 + 10 = 46$;
comme $x = 9$, $A + A' = 91 - 46 - 9 = 36$ et $S = 18$, puis $A = 35 - 23 = 13$ et $A' = 23$.



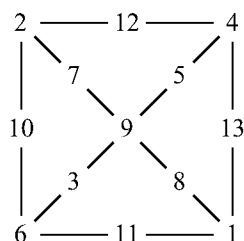
On a $a + 6, b + c = 8, c + d = 7, d + a = 5$ et $a' + a = b' + b = c' + c = d' + d = 9$,
d'où $b = 6 - a, c = 2 + a, d = 5 - a, a' = 9 - a, b' = 3 + a, c' = 7 - a, d' = 4 + a$.
et $\{a, b, c, d, a', b', c', d'\}$ est l'ensemble des nombres de 1 à 8.

Le plus petit, 1, est égal soit à a , soit à d , et alors $a = 4$. $a = 1$ ne convient pas car il implique à la fois $d = 4$ et $b' = 4$; par contre pour $a = 4$, on a la solution $b = 2, c = 6, d = 1, a' = 5, b' = 7, c' = 3, d' = 8$.

(c) De $n = 10$ et $q = 13$, on déduit $m + p = 23$ et, comme $13 > m > p$, $m = 12$ et $p = 11$ puis $M = 46$ et $A + A' + x = 91 - 46 = 45$.

Mais on a aussi $A + A' + 4x = 4S$, d'où $3x = 4S - 45$; S doit donc être divisible par 3, donc $S \geq 18$ et $x \geq 24 - 15 = 9$.

Comme les nombres supérieurs à 10 sont placés, il reste $x = 9$. On est donc ramené au tableau construit dans (b).



Exercice n° 3 (série S)

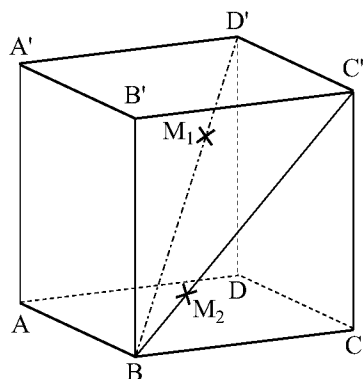
Enoncé

Mouvement dans un cube

Dans la figure ci-dessous, on a représenté un cube $ABCD A' B' C' D'$.

Les points M_1 et M_2 se déplacent à des vitesses constantes. M_1 parcourt le segment $[D'B]$ de D' vers B , M_2 parcourt le segment $[BC']$ de B vers C' . M_1 et M_2 commencent à se déplacer au même instant et M_1 atteint B à l'instant où M_2 atteint C' .

Quelle est la valeur minimale de la distance $M_1 M_2$.



Solution (Paul-Louis Hennequin)

Rapportons l'espace à un repère orthonormé $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$, et supposons $AB = 1$.

Supposons que le temps t varie de 0 à 1 quand M_1 parcourt $[D'B]$ et M_2 $[BC']$. M_1 est le barycentre de $(D', 1-t)$ et de (B, t) et M_2 celui de $(B, 1-t)$ et de (C', t) . On a donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= t\overrightarrow{BC'} + (1-t)\overrightarrow{D'B} \\ &= t(0, 1, 1) + (1-t)(1, -1, -1) \\ &= (1-t, 2t-1, 2t-1)\end{aligned}$$

$$\text{et } M_1M_2^2 = (1-t)^2 + 2(2t-1)^2 = 9t^2 - 10t + 3 = 9\left(t - \frac{5}{9}\right)^2 + \frac{2}{9}.$$

M_1M_2 est donc minimum pour $t = \frac{5}{9}$ et vaut alors $\frac{2}{9}$.

Exercice n° 4 (séries autres que S)**Enoncé****A chacun son caractère !**

Alain, Bob, Carlos, Dimitri et Emile sont cinq amis. Deux d'entre eux mentent toujours (les menteurs), deux autres disent toujours la vérité (les véridiques), quant au dernier (le versatile), il dit la vérité ou il ment selon les jours.

Leur jeu favori consiste à essayer de faire deviner à un inconnu qui, dans leur groupe est menteur, qui est véridique et qui est versatile. Aujourd'hui, chacun d'eux prononce une unique phrase ;

Alain : « *Bob dit vrai* »

Bob : « *Emile ment* »

Carlos : « *Je ne suis pas versatile* »

Dimitri : « *Je ne dis pas systématiquement la vérité* »

Emile : « *Aujourd'hui un nombre impair de personnes ont dit vrai* »

Qui est le versatile ? Qui sont les véridiques ? Qui sont les menteurs ?

Solution (Paul-Louis Hennequin)

Si Alain disait vrai, Bob aussi donc Emile mentirait ainsi que le versatile aujourd'hui ; mais alors les véridiques seraient Alain et Bob et les trois autres mentiraient. Dimitri qui mentirait dirait systématiquement la vérité, d'où une contradiction.

Donc Alain ment, Bob ment, Emile dit la vérité ; il n'y a donc que deux menteurs : Carlos et Dimitri disent la vérité et Dimitri est le versatile, Alain et Bob les menteurs, Carlos et Emile les véridiques.