

LIMOGES

Exercice n° 1

Enoncé

Un problème de magie

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On écrit successivement les entiers de 1 à n^2 dans les cases d'un tableau carré à n lignes et n colonnes en les plaçant de gauche à droite et de haut en bas.

On choisit un de ces nombres au hasard que l'on entoure et on barre tous les autres nombres de sa ligne et de sa colonne.

Parmi les nombres non entourés et non barrés, on en choisit un au hasard que l'on entoure et on barre tous les autres nombres de sa ligne et de sa colonne.

On recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre que l'on entoure.

On fait la somme S de tous les nombres entourés.

1. On étudie le cas $n = 3$. Ci-dessous, on a un exemple d'état final et $S = 4 + 2 + 9$ donc $S = 15$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Représenter tous les états finaux possibles et vérifier qu'à chaque fois, on trouve $S = 15$.

2. On étudie le cas $n = 4$. Montrer que chaque état final conduit à une même somme S que l'on déterminera.
3. Etudier de même le cas $n = 17$.

Solution (Paul-Louis Hennequin)

Une fois les nombres entourés ou barrés, il reste un seul nombre entouré dans chaque ligne et chaque colonne et réciproquement une telle configuration peut être obtenue en entourant par exemple les nombres ligne après ligne.

Soit alors dans la $i^{\text{ème}}$ ligne α_i la colonne du nombre entouré. Ce nombre est

$$n(i-1) + \alpha_1 \text{ et } S_n = \sum_{i=1}^n n(i-1) + \alpha_1$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ étant une permutation de } (1, \dots, n), \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

donc

$$S_n = n \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} (n(n-1) + n + 1) = \frac{n}{2} (n^2 + 1)$$

On trouve en particulier : $S_3 = 15$, $S_4 = 34$, $S_{17} = 2\,465$.

Exercice n° 2 (séries autres que S)**Enoncé****Tous comptes faits**

On choisit cinq nombres entiers positifs a, b, c, d et e vérifiant $a < b < c < d < e$. On les additionne deux à deux de toutes les façons possibles. On obtient ainsi tous les nombres entiers de 10 à 20 sauf un seul, compris, au sens large, entre 12 et 18.

Trouver toutes les solutions possibles. On pourra s'aider éventuellement du tableau suivant :

$a + b$	$a + c$	$a + d$	$a + e$
	$b + c$	$b + d$	$b + e$
		$c + d$	$c + e$
			$d + e$

Eléments de solution

1^{ère} étape : dans la table d'addition ainsi constituée, on peut placer les valeurs (dont on sait qu'elles sont représentées), 10, 11, 19 et 20.

En effet, la somme minimale est 10, donc $a + b = 10$.

Ensuite, entre $a + c$ et $b + c$, la plus petite est $a + c$, donc $a + c = 11$.

De la même manière, on trouve $d + e = 20$ et $c + e = 19$.

Par ailleurs, $a + b > a + a$ donc $2a < 10$ ce qui signifie $a < 5$.

De la même manière, on trouve $b > 5$, $d < 10$ et $e > 10$. Pour a , on testera donc les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. Si $a = 0$, cela implique $b = 10$. Donc les valeurs minimales de c , d , et e sont 11, 12 et 13.

Cela donne, dans ce cas $d + e > 24$, ce qui est contraire aux hypothèses de départ.

Et ainsi de suite, il ne reste que $a = 3$ ou $a = 4$.

Si $a = 3$, on obtient $b = 7$ et $c = 8$ directement. Et comme $c + e = 19$, on a $e = 11$ puis $d = 9$ avec $d + e = 20$.

Dans ce cas, toutes les sommes sont représentées, sauf 13.

$10 = a + b$; $11 = a + c$; $12 = a + d$; $14 = a + e$; $15 = b + c$; $16 = b + d$; $17 = c + d$; $18 = b + e$; $19 = c + e$; $20 = d + e$.

Si $a = 4$, on obtient $b = 6$ et $c = 7$ directement.

Et comme $c + e = 19$, on a $e = 12$ puis $d = 8$ avec $d + e = 20$.

Dans ce cas, toutes les sommes sont représentées, sauf 17.

$10 = a + b$; $11 = a + c$; $12 = a + d$; $13 = b + c$; $14 = b + d$; $15 = c + d$; $16 = a + e$; $18 = b + e$; $19 = c + e$; $20 = d + e$.

Il existe donc 2 solutions seulement, qui sont (3 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11) et (4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 12).

10 $a + b$	11 $a + c$		
	$b + c$	$b + d$	$b + e$
		$c + d$	19 $c + e$
			20 $d + e$

Exercice n° 3 (série S)

Enoncé

Les numéros de maisons

Une entreprise de peinture se voit confier la numérotation des N maisons de la rue Pierre de Fermat (numérotées de 1 à N). N compris entre 200 et 500.

Les deux employés chargés de la tâche ne travaillent pas à la même vitesse. Pendant que l'un peint 8 chiffres, l'autre en peint 11. On rappelle que le numéro 121 comporte trois chiffres.

Le moins rapide des deux commence par les plus petits numéros (1 ; 2 ; 3 etc.) pendant que l'autre commence par les plus grands (N ; $N - 1$; $N - 2$; etc.).

Sachant qu'ils terminent de peindre le même nombre de plaques au même moment et que tous les numéros de la rue sont peints, combien la rue compte-t-elle de maisons ?

Eléments de solution

1. Les nombres de chiffres peints par les deux employés sont nécessairement des multiples respectivement de 24 et de 33. En examinant les multiples successifs et en calculant pour chacun d'eux le nombre de plaques correspondant (dans un tableau par exemple) on finira par obtenir le même nombre de maisons : 132. Soit un total de 264 maisons.

2. Si on note u, d , et t le nombre de plaques respectivement à un puis deux puis trois chiffres peintes par le premier peintre, il a peint successivement le nombre suivant de chiffres :

- $u = 24k$ impossible (u va de 1 à 9)
- $9 + 2d = 24k$ impossible (9 est impair donc $9 + 2d$ également) (d va de 1 à 90)
- $189 + 3t = 24k$ oui avec $t = 1 + 8x$ et $k = 8 + x$, x entier naturel.

Le premier a peint alors : $9 + 90 + t = 99 + t$ plaques.

Le nombre de plaques peintes par le deuxième dans le même temps est : $11k = 88 + 11x$.

Ils ont peint le même nombre de plaques lorsque : $99 + 1 + 8x = 88 + 11x$, soit $x = 4$.

En reportant on obtient : $100 + 8 \times 4 = 132$ maisons chacun. Soit un total de 264 maisons.

Remarque : Cette solution est bien compliquée ! Soit N le nombre de maisons ($200 \leq N \leq 500$). Chacun peint au moins 100 plaques et le plus rapide ne peint que des plaques à trois chiffres. Le moins rapide peint donc : $9 + 2 \times 90 + 3 \left(\frac{N}{2} - 99 \right)$ chiffres = $3 \left(\frac{N}{2} - 36 \right)$ et le plus rapide $\frac{3N}{2}$ chiffres et on a $\frac{3N}{2} \times 8 = 3 \left(\frac{N}{2} - 36 \right) 11$ ou $N = 264$.