

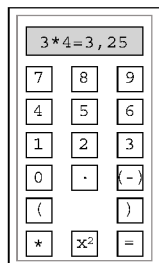
LILLE

L'évaluation portera sur la qualité de l'argumentation mais aussi sur la prise d'initiatives et sur l'originalité des idées développées. Il est donc conseillé de bien décrire sa démarche, même si elle n'aboutit pas à la solution complète de la question, un résultat partiel pouvant avoir son intérêt.

Exercice n° 1

Enoncé

Ma calculatrice bizarre



Ma calculatrice ne dispose que de trois fonctions

- le passage à l'opposé : touche $\boxed{(-)}$,

- l'élévation au carré : touche $\boxed{x^2}$,

- l'opération $*$ définie par $y * x = y + \frac{1}{x}$ pour y réel quelconque

et x réel non nul : touche $\boxed{*}$.

On dispose également de parenthèses.

Comment peut-on déterminer :

l'inverse d'un nombre non nul,

la somme de deux nombres non nuls,

la moitié d'un nombre non nul,

et le produit de deux nombres non nuls ?

Solution

Pour y et x non nul, on définit l'opération $*$ par $y * x = y + \frac{1}{x}$

Formulaire : (x est toujours un nombre réel non nul)

Inverse : $\frac{1}{x} = 0 * x$

Somme : $x + y = y * \frac{1}{x} = y * (0 * x)$

Double : $2x = x * (0 * x)$ et $\frac{2}{x} = \frac{1}{x} * \left(0 * \frac{1}{x}\right) = (0 * x) * [0 * (0 * x)]$

Moitié : $\frac{x}{2} = \frac{1}{2/x} = 0 * \frac{2}{x} = 0 * ((0 * x) * [0 * (0 * x)])$

Différence : $y - x = y + (-x) = y * [0 * (-x)]$.

Soit a et b deux nombres réels non nuls, on se propose de déterminer le produit ab uniquement à l'aide de l'opération $*$.

- N.B. Si l'un des deux nombres est nul, le produit est connu !

On dispose de l'égalité : $ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$.

$$A = (a+b)^2 = [a * (0 * b)]^2.$$

$$B = a^2 + b^2 = a^2 + (0 * b^2).$$

$$A - B = A * [0 * (-B)].$$

et $ab = \frac{A - B}{2} = 0 * ([0 * (A - B)] * (0 * [0 * (A - B)]))$.

et il suffit de remplacer $A - B$ par son expression en fonction de a et b à l'aide de l'opération $*$.

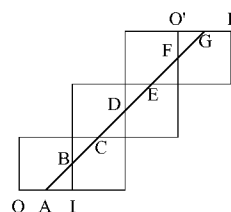
Exercice n° 2

Enoncé

Jouez au cube !

La figure ci-contre est un patron d'un cube. On a tracé le segment $[AG]$ où A et G sont les milieux respectifs de $[OI]$ et de $[O'I']$.

Les points A, B, C, D, E, F et G sont donc alignés sur ce patron. Sont-ils coplanaires dans l'espace ? Justifier.

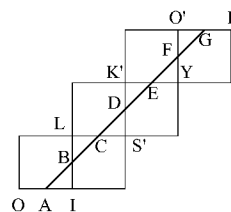


Solution

Démontrons tout d'abord que B, C, D, E, F sont les milieux respectifs des segments $[IL], [LS'], [S'K'], [K'Y]$ et $[YO']$.

On munit le plan du repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OS'})$. Une équation cartésienne de la droite (AG) est $y = x - \frac{1}{2}$.

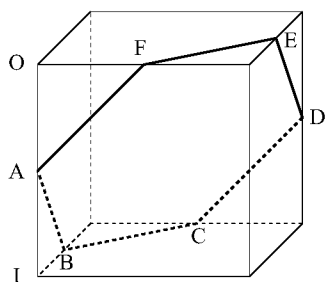
$x_B = 1$ donc $y_B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, d'où B est le milieu du



segment $[IL]$.

$y_C = 1$ donc $x_C = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, d'où C est le milieu du segment $[LS']$. De même pour les autres points.

Puis :



Les droites (AD) et (EF) sont strictement parallèles. Donc elles déterminent un plan. Ce plan contient le centre Ω du cube. Les symétriques des points E et F par rapport à Ω sont les points B et C . Les points A, B, C, D, E, F et $G (G = A)$ sont donc coplanaires.