

GUYANE

L'évaluation portera sur la qualité de l'argumentation mais aussi sur la prise d'initiatives et sur l'originalité des idées développées. Il est donc conseillé de bien décrire sa démarche, même si elle n'aboutit pas à la solution complète de la question, un résultat partiel pouvant avoir son intérêt.

Exercice n° 1

Enoncé

Le coloriage des carrés

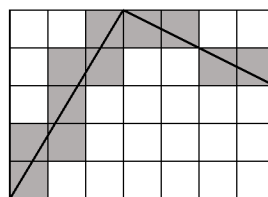
Un rectangle est quadrillé avec des petits carrés identiques. Si n désigne le nombre de carrés dans la longueur et p le nombre de carrés dans la largeur, on dit que le rectangle est de dimension $n \times p$.

Des segments étant tracés sur un rectangle quadrillé, on décide de colorier en gris tous les carrés traversés par ces segments.

Remarque :

On considère que le carré est traversé par le segment s'il y a des points du segment à l'intérieur du carré.

Par exemple, dans le rectangle de dimension 7×5 dessiné ci-dessous, les deux segments tracés imposent de colorier 11 carrés.



1. Le rectangle est de dimensions 150×90 . Combien faut-il colorier de carrés si l'on trace :

- a. une des deux diagonales (fig 1.a.) ?
- b. les deux diagonales et les segments joignant les milieux des côtés consécutifs (fig 1.b.) ?

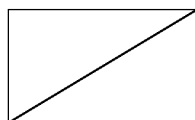


Figure 1a

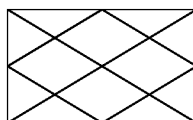
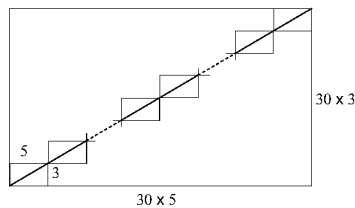


Figure 1b

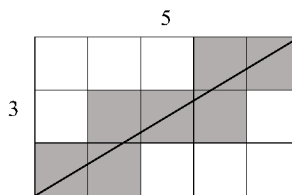
2. Le rectangle est maintenant de dimensions 150×91 . Combien faut-il colorier de carrés si l'on trace les deux diagonales ?

Solution

- 1.a. Comme $150 = 30 \times 5$ et $90 = 30 \times 3$ la diagonale d'un rectangle traverse 30 rectangles 5×3 .



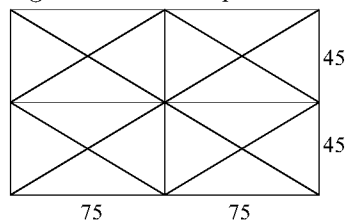
Dans ces petits rectangles 5×3 , la diagonale traverse exactement 7 carrés :



Donc la diagonale d'un rectangle 150×90 traverse $30 \times 7 = 210$ carrés

Conclusion On doit donc colorier 210 carrés.

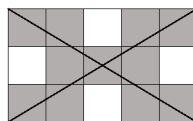
- 1.b. On découpe le rectangle 150×90 en quatre rectangles 75×45 .



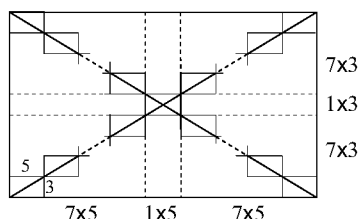
Le découpage du rectangle 75×45 suivant montre que les diagonales traversent $4 \times 7 = 28$ rectangles de type :



et 1 rectangle central de type :



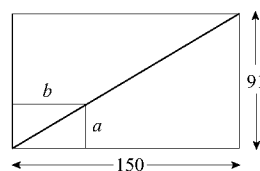
Donc les diagonales d'un rectangle 75×45 traversent $28 \times 7 + 1 \times 11 = 207$ carrés.



Conclusion : Au total on devra donc colorier $4 \times 207 = 828$ carrés

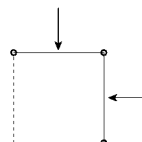
2. Remarquons d'abord que la stratégie précédente ne fonctionne plus car $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ et $91 = 7 \times 13$. n'ont aucun diviseur commun.

On en déduit par ailleurs que les diagonales ne passent jamais par le sommet d'un petit carré car sinon il existerait deux entiers a et b tels que $\frac{91}{150} = \frac{a}{b}$ et la fraction $\frac{91}{150}$ serait simplifiable, ce qui contredit la remarque précédente.



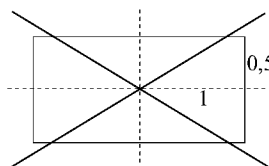
En partant du sommet en bas à gauche, la diagonale montante ne peut donc sortir d'un carré que par l'un des deux côtés marqués d'une flèche sur la figure ci-contre :

En conséquence, pour parvenir au sommet opposé la diagonale va traverser 149 côtés verticaux et 90 côtés horizontaux. Elle aura donc changé de carré exactement 239 fois.



En comptant le premier carré, elle aura traversé 240 carrés.

Il reste à remarquer que le nombre de colonnes étant pair et le nombre de lignes impair, les deux diagonales vont se croiser au centre du rectangle au milieu du côté commun aux deux carrés centraux comme l'indique le dessin ci-contre.



Les pentes des diagonales sont égales à $\frac{91}{150} \approx 0,6$ et $-\frac{91}{150} \approx -0,6$.

Le fait qu'elles soient en valeur absolue supérieures à 0,5 nous assure que, comme le montre le dessin, deux carrés seulement seront traversés deux fois.

Conclusion : On devra donc colorier $2 \times 240 - 2 = 478$ carrés.

Exercice n° 12

Énoncé

La hauteur de l'eau

Un récipient a la forme d'un cylindre surmonté d'un tronc de cône.

Le cylindre a 20 cm de hauteur et 20 cm de diamètre. Le tronc de cône a 20 cm de hauteur et une grande base de 40 cm de diamètre. (fig 1)

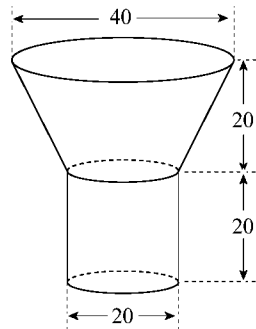


Figure 1

Une boule de 20 cm de diamètre étant coincée à l'entrée du cylindre, on verse de l'eau jusqu'à ce que la boule soit recouverte. (fig 2)

La boule est ensuite poussée jusqu'au fond du cylindre sans que l'eau ne puisse passer dessous. (fig 3)

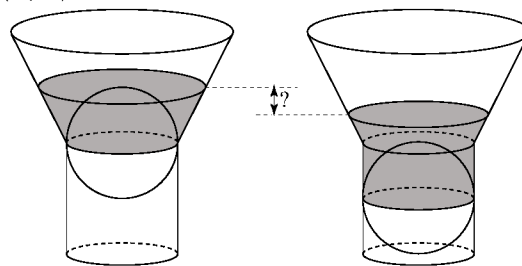


Figure 2

Figure 3

De combien le niveau de l'eau a-t-il baissé dans la partie conique du récipient ?
On donnera un résultat arrondi au mm.

Formulaire

Volume du cylindre de rayon R et de hauteur h : $\pi \times R^2 \times h$

Volume du cône de rayon R et de hauteur h : $\frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$

Volume de la sphère de rayon R : $\frac{4\pi \times R^3}{3}$.

Solution

Calculons d'abord le volume d'eau versé. Notons V_{cyl} et V_b les volumes du cylindre et de la boule.

$$V_{cyl} = \pi \times 10^2 \times 20 = 2000\pi \quad V_b = \frac{4 \times \pi \times 10^3}{3} = \frac{4000\pi}{3}$$

Une coupe du récipient montre que l'eau occupe un tronc de cône de hauteur 10 cm et dont la petite base a pour rayon 10 cm.

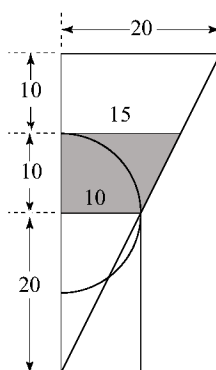
Le théorème de Thalès montre que l'autre base a pour rayon 15 cm et que le sommet du cône est au centre du fond.

Ce tronc de cône a donc pour volume :

$$\frac{\pi \times 15^2 \times 30}{3} - \frac{\pi \times 10^2 \times 20}{3} = \frac{4750\pi}{3}$$

En n'oubliant pas que l'eau n'occupe pas la demi-boule de volume, $\frac{V_b}{2} = \frac{2000\pi}{3}$, on obtient le volume d'eau versé :

$$V_{eau} = \frac{4750\pi}{3} - \frac{2000\pi}{3} = \frac{2750\pi}{3}$$



Quand la boule est au fond du cylindre, elle est tangente aux deux bases. Le volume d'eau qui entre dans la partie cylindrique du récipient est donc égal à : $\frac{V_{cyl} - V_b}{2}$, soit $\frac{1000\pi}{3}$.

On en déduit le volume d'eau qui reste dans la partie conique du récipient :

$$\frac{2750\pi}{3} - \frac{1000\pi}{3} = \frac{1750\pi}{3}$$

En notant x la hauteur du niveau d'eau depuis le fond, le volume précédent occupe un tronc de cône de hauteur $x - 20$ et dont les bases ont pour rayons 10 et R .

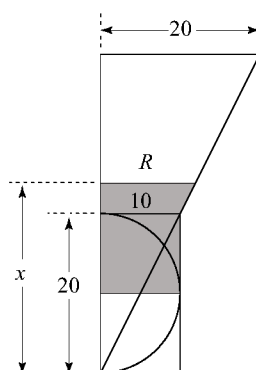
Le théorème de Thalès montre que $R = \frac{x}{2}$.

On peut donc exprimer le volume de ce tronc de cône par :

$$\frac{\pi \times R^2 \times x}{3} - \frac{\pi \times 10^2 \times 20}{3} = \frac{\pi \times x^3}{12} - \frac{2000\pi}{3} = \frac{\pi(x^3 - 8000)}{12}$$

Sachant que ce volume est égal à $\frac{1750\pi}{3}$, on a l'équa-

tion : $\frac{\pi(x^3 - 8000)}{12} = \frac{1750\pi}{3}$



On en déduit $x^3 - 8000 = 4 \times 1750$ soit $x^3 = 15000$ d'où : $x = \sqrt[3]{15000} \approx 24,7$ cm.

Conclusion : Le niveau de l'eau a baissé de $30 - 24,7 = 5,3$ cm.