

LA GUADELOUPE

Exercice n° 1 (Série S)

Énoncé

Etre ou ne pas être décimal

n étant un entier strictement positif.

montrer que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ n'est pas un décimal.

Solution

Supposons que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ soit un nombre décimal.

On peut écrire : $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{N}{10^k}$ où N et k sont des entiers.

Il vient :
$$\begin{aligned} 10^k [(n+1)(n+2) + n(n+2) + n(n+1)] &= N [n(n+1)(n+2)] \\ 10^k [3n^2 + 6n + 2] &= N [n(n+1)(n+2)] \\ 2 \cdot 10^k &= N [n(n+1)(n+2)] - [3 \cdot 10^k (n^2 + 2n)] \end{aligned}$$

ce qui est absurde car :

$2 \cdot 10^k$ ayant pour somme des chiffres 2 n'est pas un multiple de 3.

$3 \cdot 10^k (n^2 + 2n)$ est un multiple de 3.

$[n(n+1)(n+2)]$ est multiple de 3 car les nombres $n, n+1$ et $n+2$ étant consécutifs, un et un seul d'entre eux est multiple de 3. En effet :

- Si n est multiple de 3, il s'écrit sous la forme $3q$, alors $n+1 = 3q+1$ et $n+2 = 3q+2$ ne sont pas multiples de 3.
- Si n n'est pas multiple de 3, il s'écrit sous la forme $n = 3q+1$ ou $n = 3q+2$.
 - si $n = 3q+1$ alors $n+1 = 3q+2$ n'est pas multiple de 3 mais $n+2 = 3q+3 = 3(q+1)$ l'est
 - si $n = 3q+2$ alors $n+1 = 3q+3$ est multiple de 3 mais $n+2 = 3q+4 = 3(q+1)+1$ ne l'est pas.

Remarque (Dominique Roux) :

Si a, b, c sont trois entiers tels qu'un et un seul soit multiple de 3 (ce qui est le cas de trois entiers consécutifs égaux à 0, 1, 2 modulo 3), alors

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc}$$

où $ab + bc + ca$ n'est pas multiple de 3 tandis que abc l'est.

Si on avait $\frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{N}{10^k}$, on aurait $Nabc = 10^k(ab + bc + ca)$ avec à gauche un multiple de 3 et à droite un non-multiple de 3.

Exercice n° 2

Énoncé

La géométrie... c'est élémentaire !

A et B sont deux points distincts du plan. On pose $AB = a$.

Par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, le point B est transformé en C .

Par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, le point C est transformé en I .

Le point D est le symétrique de A par rapport à I .

Par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, le point D est transformé en E .

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, le point D est transformé en F .

1. Quelle est la nature du triangle BEF ?
2. Calculer l'aire du triangle BEF en fonction de a .
3. J et K désignant les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[CF]$, montrer que le quotient de l'aire du triangle BEF par l'aire du triangle JBK ne dépend pas de a .

Solution (proposée par Arthur VESPUCE)

On obtient facilement les résultats suivants :

- Les triangles ABC et ADE sont des triangles équilatéraux (isocèles avec un angle de $\frac{\pi}{3}$).
- Le quadrilatère $ADFC$ est un rectangle de largeur a et de longueur $2a$.
- Les segments $[DF]$, $[IK]$ et $[AC]$ ont même médiatrice et cette médiatrice passe par B (équidistant de A et C)
- Les segments $[AD]$ et $[CF]$ ont même médiatrice qui contient E .

On rappelle que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté x est $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ et que son aire est $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

1.) On montre que le triangle BEF est équilatéral par trois méthodes :

Première méthode : (par utilisation du théorème de Pythagore)

En désignant par M le milieu de $[DF]$, le théorème de Pythagore dans le triangle BMF , rectangle en M , donne :

$$BF^2 = MF^2 + MB^2$$

Or : $MF = \frac{a}{2}$ et $MB = 2a + a\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $BF^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(2a + a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2(5 + 2\sqrt{3}).$

Dans le triangle EKF , rectangle en K , on a de même :

$$KF = a \text{ et } KE = a + 2a\frac{\sqrt{3}}{2} = a + a\sqrt{3}.$$

On déduit que : $EF^2 = a^2 + (a + a\sqrt{3})^2 = a^2(5 + 2\sqrt{3}).$

En désignant par N le milieu de $[IK]$, le triangle BNE est rectangle en N .

On a :

$$BN = a + a\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ et } NE = \frac{a}{2} + 2a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On déduit par le théorème de Pythagore que :

$$BE^2 = \left(a + a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + 2a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2(5 + 2\sqrt{3}).$$

On conclut que le triangle BEF est équilatéral.

Deuxième méthode : (*utilisation des triangles isométriques*)

On se propose de montrer que les triangles BCF , FDE et BAE sont isométriques.

On a :

$$BC = FD = BA = a.$$

$$CF = DE = AE = 2a.$$

$$\widehat{BCF} = \widehat{BCA} + \widehat{ACF} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

De même : $\widehat{FDE} = \widehat{FDA} + \widehat{ADE} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

Par ailleurs, $\widehat{BAE} = 2\pi - \widehat{BAC} - \widehat{CAD} - \widehat{DAE} = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

Donc : $\widehat{BCF} = \widehat{FDE} = \widehat{BAE} = \frac{5\pi}{6}.$

Il en résulte que les triangles BCF , FDE et BAE sont bien isométriques et que $BF = FE = BE$. Le triangle BEF est un triangle équilatéral.

Troisième méthode : (*Utilisation de la relation d'Al Kashi*)

On montre comme ci-dessus que : $\widehat{BCF} = \widehat{FDE} = \widehat{BAE} = \frac{5\pi}{6},$

puis on calcule :

$$BF^2 = BC^2 + CF^2 - 2 \cdot BC \cdot CF \cdot \cos \widehat{BCF}$$

$$BF^2 = a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

Or : $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ou bien on écrit : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ pour calculer son cosinus.

On obtient : $BF^2 = 5a^2 + 4a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 (5 + 2\sqrt{3})$.

Les calculs sont identiques pour les autres côtés et le triangle BEF est un triangle équilatéral.

2. L'aire du triangle équilatéral BEF est donnée par :

$$BF^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 (5 + 2\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3} + 6}{4} a^2.$$

3. On peut reprendre l'une quelconque des trois méthodes ci-dessus pour montrer que le triangle BKJ est équilatéral. Il est par conséquent semblable au triangle BEF . Le rapport des aires de ces triangles est le carré du rapport de similitude entre ces deux triangles c'est-à-dire : $\left(\frac{BF}{BK} \right)^2 = \frac{BF^2}{BK^2}$.

Le calcul de BK donne, par exemple, dans le triangle rectangle BNK :

$$BK^2 = KN^2 + NB^2 = BF^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(a + a \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = a^2 (2 + \sqrt{3}).$$

Le rapport des aires est égal à :

$$\frac{a^2 (5 + 2\sqrt{3})}{a^2 (2 + \sqrt{3})} = 4 - \sqrt{3}.$$

Il ne dépend donc pas de a .

