

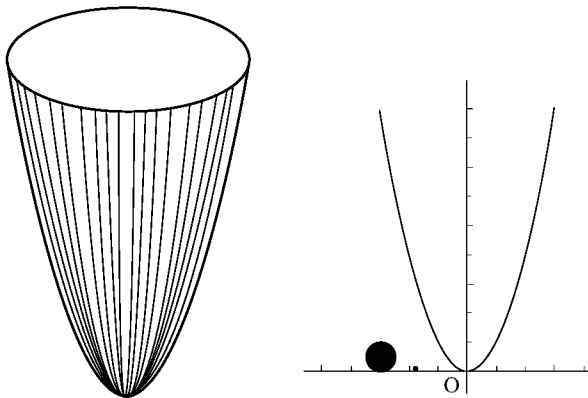
GRENOBLE

Exercice n° 1 (Séries S, STI)

Énoncé

Deux billes dans une urne

Une urne a la forme d'un parabolôide de révolution de hauteur 9 (l'unité est le centimètre). La section de ce parabolôide par un plan passant par son axe est la parabole dont une équation dans un repère orthonormal bien choisi est $y = x^2$.



1. On fait tomber dans l'urne une bille sphérique B de rayon 0,1. La bille B va-t-elle toucher le fond de l'urne ?
2. On fait tomber dans l'urne une seconde bille sphérique B' de rayon 1. La bille B' va-t-elle toucher la bille B ?

Solution

1. On note $(0; c)$ les coordonnées du centre C de la bille. CM^2 où M est un point de la parabole est égal à $x^4 + (1 - 2c)x^2 + c^2$.
Notons g la fonction définie par : $g(x) = x^4 + (1 - 2c)x^2 + c^2$.
L'étude des variations de g (dans $\mathbf{R}^+$) donne :

Si $1 - 2c \geq 0$, alors g est croissante, le minimum est donc $g(0) = c^2$.

Si $1 - 2c \leq 0$, alors g possède un minimum égal à $c - 0,25$, atteint en $\sqrt{\frac{2c-1}{2}}$.

Dans le cas de la bille de rayon 0,1, le minimum est atteint en 0, la bille touche donc le fond.

2. Dans le cas de la bille de rayon 1, le minimum est atteint en $\sqrt{\frac{2c-1}{2}}$. La bille ne touche pas le fond.

La position du centre de la bille quand elle est tangente à la parabole est telle que $c - 0,25 = 1$ soit $c = 1,25$. Elle ne touche donc pas l'autre bille.

Remarque (Dominique Roux) :

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(0; c)$ et de rayon r a pour équation $x^2 + (y - c)^2 = r^2$. Il coupe la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ en un point d'ordonnée y si $y \geq 0$ et $y + (y - c)^2 = r^2$ ou $y^2 + (1 - 2c)y = r^2 - c^2$.

Deux cas sont possibles :

- a) $c = r$; l'équation a deux racines $y = 0$ et $y = 2c - 1$; $\mathcal{C}$ est intérieur à $\mathcal{P}$ si et seulement si $2c - 1 \leq 0$ ou $r = c \leq \frac{1}{2}$.
- b) $c > r$; l'équation a une racine double positive si et seulement si $(1 - 2c)^2 = 4(c^2 - r^2)$ ou $1 - 4c + 4r^2 = 0$ ou $c = r^2 + \frac{1}{4}$.

L'ordonnée minimum d'un point de $\mathcal{C}$ est alors $c - r = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2$.

Exercice n° 2 (Séries autres que S et STI)

Enoncé

Les nombres palindromes

Un nombre naturel est un palindrome s'il conserve sa valeur quand on inverse l'ordre de ses chiffres. Exemples : 12321, 341143, 7 sont des palindromes, 12341 ne l'est pas.

- Combien y a-t-il de nombres palindromes ne contenant pas le chiffre 0 qui sont strictement inférieurs à 1000 ?
- Combien y a-t-il de nombres palindromes ne contenant pas le chiffre 0 qui sont strictement inférieurs à 2000 ?
- Combien y a-t-il de nombres palindromes ne contenant pas le chiffre 0 qui sont strictement inférieurs à 1234567 ?

Solution

- J'indique la « forme » d'un nombre ainsi que le nombre de possibilités pour chaque type :

a	9
$\overline{aa}$	9
$\overline{aba}$	81

Total : 99 nombres palindromes sans chiffre 0 qui sont inférieurs à 1000.

2. entre 1000 et 2000 il y a en plus $\overline{1aa1}$ ce qui fait $108=99+9$ nombres inférieurs à 2000.

3. Nombres inférieurs à 1 234 567

a) nombres inférieurs à 1 000 000 :

a	9
$\overline{aa}$	9
$\overline{aba}$	81
$\overline{abba}$	81
$\overline{abcba}$	729
$\overline{abccba}$	729

ce qui fait $2(9+81+729)=1638$ nombres palindromes inférieurs à 1 000 000.

b) Entre 1 000 000 et 1 234 567 il y a en plus les types

$\overline{11aba11}$	$(1 \leq a, b \leq 9) : 81$
$\overline{12aba21}$	$(1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 9) : 18$
$\overline{123a321}$	$(1 \leq a < 4) : 3.$

Ce qui fait un total de : 102

Il y a donc $1638 + 102 = 1740$ nombres strictement inférieurs à 1 234 567.

Exercice n° 3 (Toutes séries)

Enoncé

Jeu de cubes

On dispose de cubes en bois blanc tous identiques et on désire les peindre de façon à obtenir des cubes différents, chaque face d'un cube étant unicolore.

1. On dispose de deux tubes de peinture, l'un de couleur rouge, l'autre de couleur noire. Combien de cubes bicolores différents peut-on obtenir ?
2. On dispose de six tubes de peinture de couleurs différentes et on utilise exactement les six couleurs (c'est-à-dire qu'il n'y a pas deux faces colorées avec la même couleur) pour peindre chaque cube. Combien de cubes différents peut-on obtenir ?

Solution

1. (a, b) désignant un cube avec a faces rouges et $b = 6 - a$ faces noires :

$(1, 5)$:	1 possibilité
$(2, 4)$:	2 (les deux faces rouges sont soit adjacentes soit opposées)
$(3, 3)$:	2 (soit il y a deux faces rouges opposées, soit il y a un sommet entouré uniquement de faces rouges)
$(4, 2)$:	2 (par symétrie)
$(5, 1)$:	1 (par symétrie)

Total 8 cubes strictement bicolores.

2. $\frac{6!}{24} = 30$ cubes différents avec 6 couleurs.

Remarque (Dominique Roux) :

Les 30 cubes sont connus sous le nom de **Cubes de Mac Mahon**. Percy Mac Mahon (1854 – 1929) est un capitaine et mathématicien britannique, spécialiste de combinatoire qui a posé et résolu le problème suivant :

Etant donné un des cubes, comment en choisir huit autres pour le dupliquer en assurant que chaque face du cube double ne porte qu'une seule couleur ?

Ce problème et la construction de dodécaèdres associés fait l'objet du chapitre VII, p. 331 à 352, du livre « *Avec des nombres et des lignes* » d'André Sainte-Laguë (Vuibert, réédition 2001).