

DIJON

Exercice n° 1

Enoncé

Les pesées frauduleuses

Vers l'an 250 de notre ère, vivait à Alexandrie le mathématicien Diophante. Celui-ci avait remarqué que certains marchands d'orge truquaient leur balance à plateaux en raccourcissant l'un des fléaux : ils trompaient les clients sur la quantité en plaçant les masses du côté du fléau le plus court. (En effet, à l'équilibre, le produit de la masse par la longueur du fléau, exprimés dans la même unité, est le même de chaque côté.)

Pour punir les marchands malhonnêtes, Diophante leur proposait de mettre alternativement les masses dans un plateau, puis dans l'autre : un client serait lésé, le suivant avantagé... et les fraudeurs étaient heureux de s'en tirer à si bon compte.

- 1) Un marchand ayant raccourci un fléau de 10 % avait réalisé dans la journée 180 pesées d'un kilogramme, en suivant la règle de Diophante. Quelle quantité d'orge avait-il perdue ?
- 2) Même question pour un marchand ayant raccourci un fléau de 20 %, après avoir réalisé 160 pesées d'un kilogramme.
- 3) Montrer qu'avec la règle de pesée de Diophante, tout fléau raccourci cause un préjudice à son auteur, après un nombre pair de pesées.

Solution

Soit L et ℓ les longueurs des deux bras de fléau, exprimées dans la même unité. On suppose qu'une masse de 1 kg placée du côté du fléau le plus long est équilibrée par une masse M (en kg) vérifiant, d'après la règle d'équilibre :

$$1 \times L = M \times \ell, \text{ d'où : } M = \frac{L}{\ell}.$$

De même, une masse de 1 kg placée du côté du fléau le plus court est équilibrée par une masse m qui s'exprime en kg par : $m = \frac{\ell}{L}$.

Lorsque le marchand réalise n pesées de 1 kg de chaque côté (avec n entier non

nul), il est censé vendre $2n$ kg d'orge, alors qu'il en vend en réalité $n \times \frac{L}{\ell} + n \times \frac{\ell}{L}$ kilogrammes.

1. Si un fléau est raccourci de 10 % de sa longueur, on a $\ell = 0,9 \times L$ et le marchand a vendu au bout de 180 pesées : $90 \times \left(\frac{1}{0,9} + 0,9 \right)$ kg, soit 181 kg, au lieu des 180 kg prévus.

Il a donc perdu 1 kg d'orge (soit environ 0,6 % de sa marchandise).

2. Si un fléau est raccourci de 20 % de sa longueur, on a $\ell = 0,8 \times L$ et le marchand a vendu au bout de 160 pesées : $80 \times \left(\frac{1}{0,8} + 0,8 \right)$ kg, soit 164 kg, au lieu des 160 kg prévus.

Il a donc perdu 4 kg d'orge (soit environ 2,4 % de sa marchandise).

3. Posons $t = \frac{L}{\ell}$. Comme $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$, il en résulte que $t + \frac{1}{t} \geq 2$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque $t = 1$.

Au bout de $2n$ pesées, la quantité vendue est $n \times \left(t + \frac{1}{t} \right)$, et cette quantité est supérieure à la quantité prévue (qui est égale à $2n$) dès que $t > 1$, c'est-à-dire dès que $L > \ell$.

Les fraudeurs sont donc toujours perdants.

Exercice n° 2

Énoncé

Périodes

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f et montrer que si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq f(x) \leq 1$.

Un nombre $x_0 \in [0, 1]$ étant choisi, on fabrique une suite de nombres en posant : $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc.

2. Où l'on étudie quelques cas particuliers.

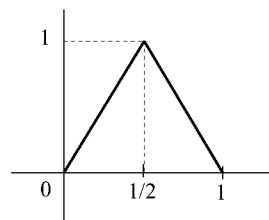
a) On pose $x_0 = \frac{1}{48}$. Montrer que la suite obtenue est constante à partir de x_5 .

b) On pose $x_0 = \frac{2}{11}$. Écrire les 5 premiers termes de la suite obtenue et en déduire la valeur de x_{2006} .

- c) Peut-on trouver une valeur de x_0 telle que la suite de nombres se répète tous les 7 termes ? tous les p termes (p étant un entier non nul quelconque) ?
3. Montrer que si x_0 est un nombre rationnel, la suite de nombres est périodique (c'est-à-dire qu'elle se répète à partir d'un certain rang).

Solution 1

1) La représentation graphique est celle d'une fonction affine par intervalle. Lorsque $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq 2x \leq 1$ et lorsque $\frac{1}{2} < x \leq 1$, $0 \leq 2 - 2x \leq 1$ donc lorsque x varie dans l'intervalle $[0,1]$, il en est de même pour $f(x)$, ce qui assure la possibilité de fabrication de la suite de nombres.



2) Etude des cas particuliers

- a) Si $x_0 = \frac{1}{48}$ les valeurs successives sont $x_1 = \frac{1}{24}$, $x_2 = \frac{1}{12}$, $x_3 = \frac{1}{6}$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = \frac{2}{3}$, $x_6 = 2 - \frac{4}{3}$, $x_7 = \frac{2}{3}$, ... d'où le résultat.
- b) Si $x_0 = \frac{2}{11} = \frac{2}{3}$, les valeurs successives sont $x_1 = \frac{4}{11}$, $x_2 = 2x_1 = \frac{8}{11}$, $x_3 = 2 - \frac{16}{11} = \frac{6}{11}$, $x_4 = 2 - \frac{12}{11} = \frac{10}{11}$, $x_5 = 2 - \frac{20}{11} = \frac{2}{11}$.

On constate donc que $x_5 = x_0 = x_{10} = \dots x_{5k}$. Or $2006 = 2005 + 1$ et d'après ce qui précède, $x_{2005} = x_0$. On en déduit finalement $x_{2006} = x_1 = \frac{4}{11}$.

- c) Cherchons x_0 tel que $\frac{1}{128} < x_0 < \frac{1}{64}$ et que $x_0 = x_7$. On peut par exemple adopter le schéma suivant : $x_1 = 2x_0$, $x_2 = 4x_0$, $x_3 = 8x_0$, $x_4 = 16x_0$, $x_5 = 32x_0$, $x_6 = 64x_0$, et $x_7 = 2 - 128x_0 = x_0$.
On en déduit $x_0 = \frac{2}{129}$ qui convient.

Procédons de même si l'on veut que $x_p = x_0$, on trouvera $x_0 = \frac{2}{1 + 2^p}$.

Remarque : d'autres nombres répondent à la question comme $x_0 = \frac{2}{2^p - 1}$.

- 3) Posons $x_0 = \frac{p}{q}$ où $p < q$. Il existe, dans l'intervalle $[0,1]$, q fractions du type $\frac{k}{q}$ avec $k = 1, 2, \dots, q$. D'autre part, si x est un rationnel, $f(x)$ aussi et a le même dénominateur que x . $f(x)$ ne peut donc prendre qu'au plus q valeurs et la suite est donc nécessairement périodique.

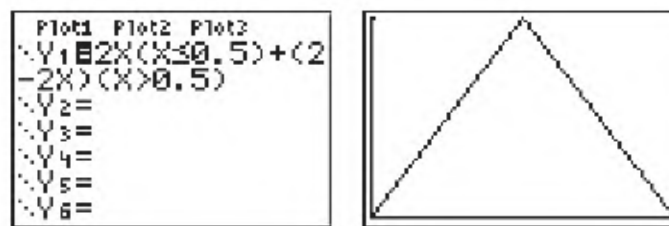
Solution 2 (avec calculatrice – A. Guillemot)

1). Représentation graphique.

Pour représenter graphiquement une fonction définie par intervalle, on utilise la notion de booléen. Par exemple si j'écris $Y1 = (X > 1 \text{ AND } X < 3)$, la représentation va valoir 1 quand la condition est satisfaite, 0 ailleurs.



Appliquons cette possibilité au problème proposé dans la fenêtre $[0; 1] \times [0; 1]$.

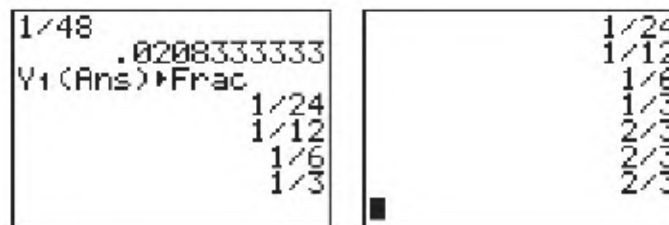


La représentation graphique nous permet de dire tout de suite que $f([0; 1]) = [0; 1]$.

2. Étude des cas particuliers.

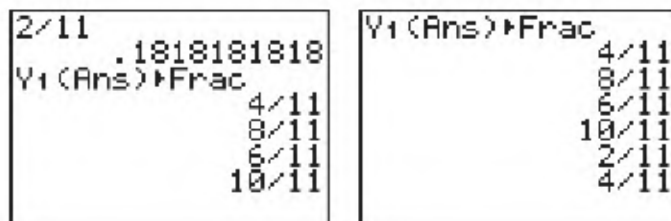
L'utilisation de la commande **Ans** associée à la notion de récurrence permet d'avoir directement tous les résultats en appuyant sur la touche **ENTER** plusieurs fois.

2.a) Si $x_0 = \frac{1}{48}$



On a donc $x_1 = \frac{1}{24}, x_2 = \frac{1}{12}, x_3 = \frac{1}{6}, x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{2}{3}, x_6 = \frac{2}{3} \dots$
Ce qui montre que la suite est constante à partir de x_5 .

2.b) Si $x_0 = \frac{2}{11}$.

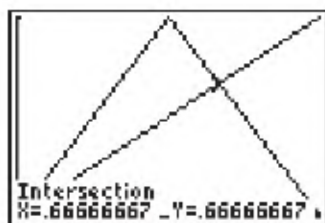


On a donc $x_1 = \frac{4}{11}, x_2 = \frac{8}{11}, x_3 = \frac{6}{11}, x_4 = \frac{10}{11}, x_5 = \frac{2}{11}, x_6 = \frac{4}{11} \dots$

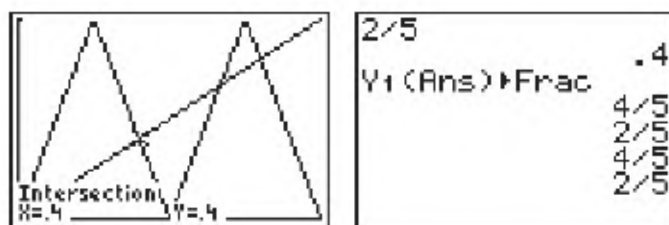
Ce qui montre que la suite est périodique de période 5 donc $x_{2007} = \frac{8}{11}$.

2.c) Recherche d'une valeur x_0 telle que la suite de nombres se répète tous les p termes.

Remarquons que pour $x_0 = \frac{2}{3}$ la suite se répète tous les termes. Cette valeur correspond à la solution non nulle de l'équation $f(x) = x$.

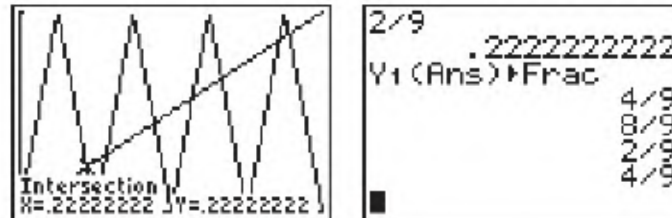


Représentons maintenant la fonction $Y2(X) = Y1(Y1(X))$ et intéressons nous à la première solution non nulle de l'équation $Y2(X) = X$.



$\frac{2}{5}$ engendre une suite de période 2.

Représentons maintenant la fonction $Y3(X) = Y1(Y2(X))$ et intéressons nous à la première solution non nulle de l'équation $Y3(X) = X$



$\frac{2}{9}$ engendre une suite de période 3.

Y_3 est représentée par 8 segments de coefficient directeur 8 et -8 .

Son expression est :

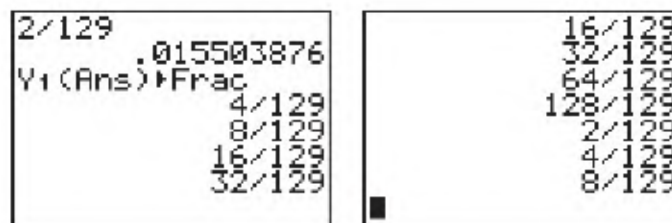
$$Y_3(X) = 8X \text{ si } 0 \leq X \leq \frac{1}{8}$$

$$Y_3(X) = 2 - 8X \text{ si } \frac{1}{8} < X \leq \frac{2}{8} \text{ etc.}$$

La première solution non nulle de l'équation $Y_3(X) = X$ est obtenue en résolvant l'équation : $2 - 8X = X$, ce qui donne $X = \frac{2}{9}$.

Pour trouver une valeur qui engendre une suite de période 7, les résultats précédents nous suggèrent de résoudre l'équation : $2 - 2^7 X = X$. On trouve $X = \frac{2}{129}$

Vérifions que cette valeur répond bien à la question.



Pour trouver une valeur qui engendre une suite de période p , il suffit de résoudre l'équation : $2 - 2^p X = X$. On trouve $X = \frac{2}{2^p + 1}$

Bien entendu il y a d'autres nombres qui répondent à la question. En particulier certaines solutions de l'équation $Y_p(X) = X$.

3) Posons $x_0 = \frac{p}{q}$ où $p < q$. Les x_n engendrés par cette valeur peuvent s'écrire sous la forme $\frac{k}{q}$ (fraction non simplifiée) avec $k \leq q$

Soit $A = x_0, x_1, x_2, \dots, x_q$ (toutes ces valeurs ayant pour dénominateur q).

A contient $q + 1$ éléments et les numérateurs ne peuvent prendre que q valeurs possibles. Donc dans A il existe au moins deux éléments identiques, ce qui entraîne que la suite est périodique ou constante à partir d'un certain rang.