

CRÉTEIL

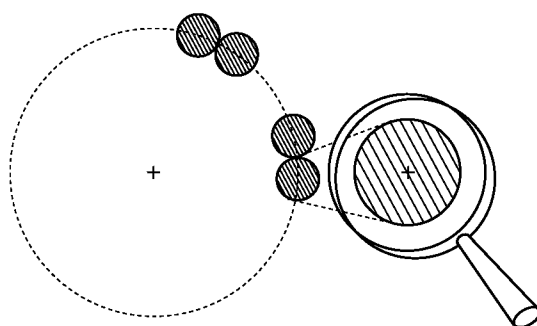
Exercice n° 1

Enoncé

Le collier de perles

Un collier est composé de n perles de rayon r .

Hypothèse : *Il y a suffisamment de perles pour que l'on puisse schématiser ce collier comme la figure ci-dessous et donc considérer que la longueur de fil du collier (représenté en pointillés) nécessaire pour chaque perle est égale à $2r$.*

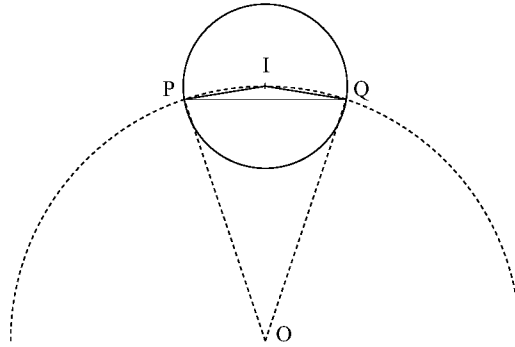


Calculer alors le rayon R du collier en fonction de n et de r .

Que pensez-vous de la validité de l'hypothèse choisie ci-dessus quand $n = 10$, quand $n = 20$?

Solution (Paul-Louis HENNEQUIN)

$$2\pi R = 2nr \text{ donc } R = \frac{nr}{\pi}.$$



Une analyse plus fine doit prendre en compte le trajet du fil à travers la perle et le diamètre du trou (donc celui du fil !)

On a $\widehat{PQ} = 2r$, mais il est difficile de percer des trous courbes !

Si un trou est cylindrique, on a le choix entre le trajet direct (qui ne passe pas par le centre) de longueur $PQ = 2R \sin \frac{\pi}{n}$, et le trajet PIQ de longueur $2R \tan \frac{\pi}{n}$.

Pour $n = 10$, $\widehat{PQ} = 2r$; $PQ = \frac{20r}{\pi} \sin 18^\circ = 2r \times 0,993$;

$PI + IQ = \frac{20r}{\pi} \tan 18^\circ = 2r \times 1,03$.

Pour $n = 20$, $\widehat{PQ} = 2r$; $PQ = \frac{40r}{\pi} \sin 9^\circ = 2r \times 0,996$;

$PI + IQ = \frac{40r}{\pi} \tan 9^\circ = 2r \times 1,01$.

Exercice n° 2

Enoncé

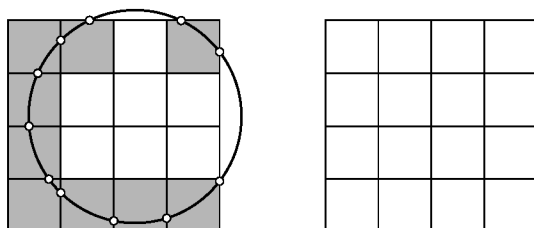
Cercle sur quadrillage

Dans un plan, on dispose de damiers carrés de n cases de côté ($n \geq 2$), toutes les cases étant des carrés dont le côté est pris comme unité de longueur.

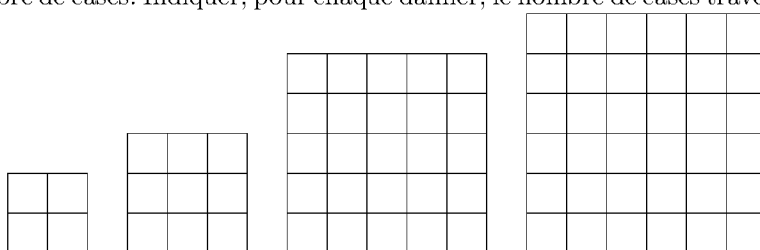
Sur chaque damier, l'objectif est de tracer un cercle qui traverse le plus grand nombre de cases. On considère qu'un cercle traverse une case s'il passe à l'intérieur de celle-ci.

1. Sur le damier 4×4 représenté ci-dessous, on a tracé un cercle qui traverse 9 cases.

Peut-on en tracer un qui traverse davantage de cases ? Si oui, dessiner un tel cercle sur le damier de droite ci-dessous. Quel peut être le nombre maximal de cases traversées ? Justifier la réponse.

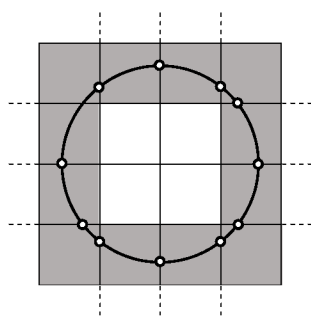


2. Sur chacun des damiers représentés ci-dessous, tracer un cercle traversant un nombre de cases. Indiquer, pour chaque damier, le nombre de cases traversées.



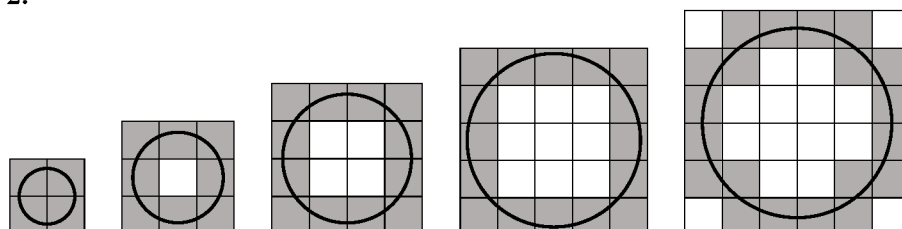
3. Formuler une conjecture sur le nombre maximal de cases traversées par un cercle sur un damier $n \times n$ où $n \geq 2$.
Démontrer cette conjecture.

Solution



1. Un cercle traverse au maximum 12 cases sur un damier 4×4 . En effet, chacune des six droites représentées en pointillés est coupée en au plus deux points par un cercle. On a donc au maximum 12 points d'intersection entre le cercle et les six droites. Dans le meilleur des cas, chaque point d'intersection correspond au passage du cercle d'une case dans une autre. Le cercle traverse donc au maximum 12 cases. Le dessin ci-contre montre que c'est possible.

2.



4 cases

8 cases

12 cases

16 cases

20 cases

3. On peut conjecturer que sur un damier $n \times n$, un cercle traverse au maximum $4n - 4$ cases. On peut reprendre l'argument utilisé dans la question 1.

Les $2n - 2$ droites intérieures sont coupées par un cercle en au plus $4n - 4$ points. Dans le meilleur des cas, chaque point d'intersection entre le cercle et une droite intérieure correspond au passage du cercle d'une case à une case adjacente.

Si un cercle tracé dans le plan du damier passe par un ou plusieurs noeuds du quadrillage, le nombre de cases traversées sera strictement inférieur à $4n - 4$. Mais on peut toujours, moyennant une augmentation ou une diminution du rayon du cercle tout-à-fait négligeable (par rapport à l'unité), faire en sorte d'obtenir un cercle qui ne passe par aucun noeud du quadrillage. En effet, le nombre de noeuds du quadrillage n'appartenant pas au cercle est en nombre fini. Si l'on désigne par R le rayon du cercle, par d la distance minimale non nulle entre l'un de ces noeuds et le cercle, les cercles de rayons $R - \frac{d}{2}$ et

$R + \frac{d}{2}$ par exemple ne passeront par aucun noeud du quadrillage. On pourrait également déplacer le centre du cercle d'une distance très petite devant 1 dans une direction de notre choix.