

CORSE

Exercice n° 1

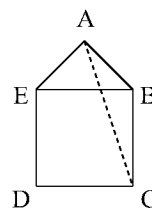
Enoncé

Avec des polygones...

1. $ABCDE$ est un polygone convexe à 5 côtés tel que $BCDE$ soit un carré et les triangles ABC et ABE aient la même aire égale au quart de celle de $BCDE$ (figure 1 ci-contre).

Déterminer l'angle $\widehat{BAE}$.

On dira que le segment $[DC]$ est « la base » du polygone et que les segments $[AE]$ et $[AB]$ forment le « toit » du polygone.



2. On construit à l'extérieur de $ABCDE$ deux polygones de même forme que $ABCDE$ dont les bases sont les segments de son toit. On poursuit cette construction de façon à ce que, sur chaque toit, viennent les bases de deux polygones de même forme, comme le montre la figure 2 (qui n'est pas complète).

Sachant que le segment $[DC]$ mesure 3 cm, est-il possible que l'aire de la surface recouverte par tous les polygones construits dépasse 2007 cm^2 ?

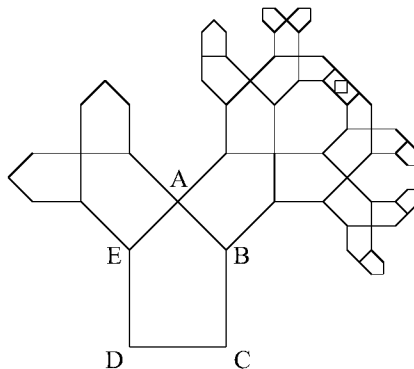


Figure 2

Formulaire : si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q ,

alors on a : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = u_0 q \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Pour tout réel q ($q \neq 1$) et tout entier n , on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

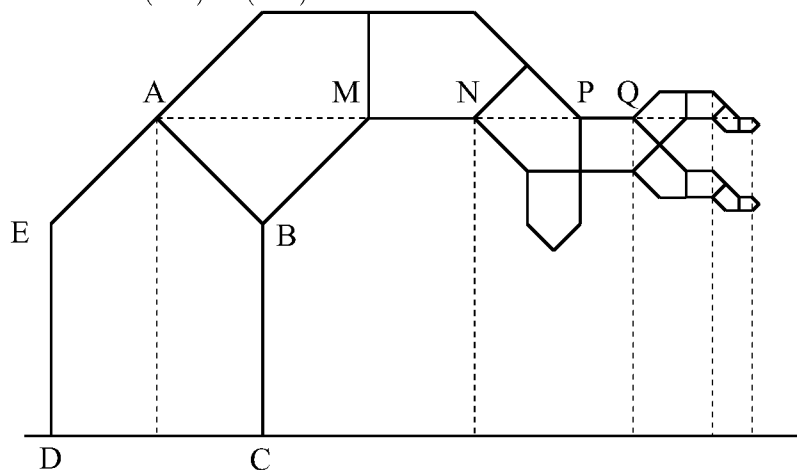
Solution

1. ABC et ABE ont la même base AB et la même aire. Ils ont donc la même hauteur correspondante. (EC) est donc parallèle à (AB) . Donc $\widehat{ABE} = \widehat{BEC}$ et $ABCD$ étant un carré $\widehat{BEC} = 45^\circ$. Donc $\widehat{ABE} = 45^\circ$.

Soit O le centre du carré $BCDE$. Les triangles ABC et OBC ont la même aire égale au quart de celle du carré. Ils ont la même base BC donc la même hauteur correspondante et donc (AO) est parallèle à (BC) . Donc (AO) est perpendiculaire à (BE) . A est donc sur la médiatrice de $[BE]$.

Le triangle ABE est isocèle de sommet A et $\widehat{ABE} = 45^\circ$. Il est donc rectangle en A .

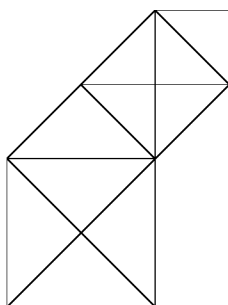
2. Considérons la construction au delà de $ABCDE$: elle est formée de quatre parties isométriques qui se déduisent par symétrie orthogonales d'axes les médiatrices de (AB) et (BE) .



Pour évaluer la « taille » d'une de ces quatre parties, considérons son projeté sur la droite (DC) . On peut considérer la construction de ce projeté comme la réunion des projections de segments successifs l'un étant la diagonale d'un carré et l'autre le côté du carré suivant.

Considérons deux étapes successives.

La longueur du côté d'un carré est la moitié de la diagonale de carré précédent.



La longueur de la diagonale d'un carré est égale à celle du côté du carré précédent. $NQ = NP + PQ = MN + \frac{1}{2}NP = \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}AN$.

Considérons comme une étape le fait de construire deux polygones successifs au delà de $ABCDE$, La longueur du projeté sur (DC) sera

$$AN + \frac{1}{2}AN + \left(\frac{1}{2}\right)^2 AN + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n AN = AN \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2}$$

$$= 2AN \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2AN - AN \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Cela montre que la longueur du projeté des segments sur (DC) reste inférieure à $2AN = 9$ cm. L'aire de l'une des quatre branches est donc inférieure à celle d'un carré de côté 10 cm.

L'aire totale couverte par la construction est donc inférieure à 400 cm^2 .

Exercice n° 2

Enoncé

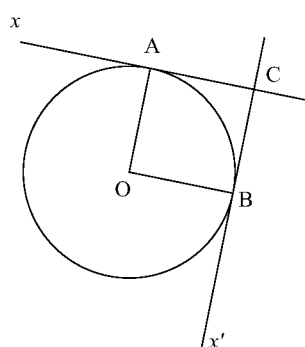
Le cameraman. . .

Un cameraman décide de filmer une scène d'un film qui se passe au pied d'une tour génoise .

1. Dans cette question, il est envisagé le cas d'une tour modélisée par un cylindre dont la base est un cercle de rayon R « posé » sur un plan. La caméra est considérée comme un point dans ce plan. Le cameraman place sur sa caméra un objectif dont l'angle de prise de vue horizontalement est de 90 degrés. Déterminer la partie du plan autour de la tour dans laquelle la caméra ne doit pas rentrer pour que la base de la tour reste toute entière dans le champ de la caméra.
2. Dans cette question, il est envisagé le cas d'une tour dont la base est un carré de côté a . Le cameraman place encore sur sa caméra un objectif dont l'angle de prise de vue horizontalement est de 90 degrés.
 - a) Déterminer la partie du plan dans laquelle la caméra ne doit pas rentrer pour que la base de la tour reste toute entière dans le champ de la caméra.
 - b) A l'extérieur de cette zone, le cameraman envisage de placer sa caméra sur un cercle de rayon r et de même centre O que la base de la tour, et sur un des axes de symétrie de cette base. Il doit changer d'objectif.

Déterminer suivant les valeurs de r et a , les positions où il voit la base de la tour sous le plus grand angle.

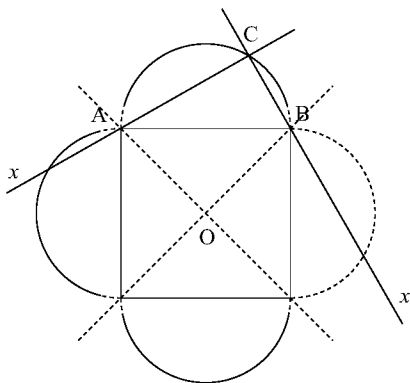
Solution



O et rayon $R\sqrt{2}$. Le caméraman ne peut donc pas entrer dans un disque (ouvert) de centre O et rayon $R\sqrt{2}$.

1. Modélisons la caméra comme un point C à l'extérieur du disque de centre O et de rayon R représentant la base de la tour. Le champ de la caméra est un angle de sommet C , C peut se rapprocher du disque jusqu'à ce que les demi-droites $[C, x)$ et $[C, x')$ soient tangentes au cercle de centre A et rayon R , respectivement en A et B . Si l'angle du champ de la caméra est droit, le quadrilatère $OACB$ a 3 angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur. C'est donc un carré de diagonale $OC = R\sqrt{2}$. Ainsi C est sur le cercle de centre

2.a). Par symétrie cherchons à résoudre le problème dans un quart de plan formé des points du plan plus proches de deux sommets A et B de la base carrée de la tour. La caméra pourra se rapprocher jusqu'à ce que les deux sommets A et B soient sur les demi-droites $[C, x)$ et $[C, x')$, c'est-à-dire jusqu'à ce que le triangle CAB soit rectangle. L'ensemble des points extérieurs au carré tels que CAB soit rectangle en C est un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Ainsi C doit se situer dans le quart de plan de frontières $[OA)$ et $[OB)$ et à l'extérieur d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. La caméra doit rester à l'extérieur de la portion de plan formée par la base carrée de la tour et les disques dont les diamètres sont les côtés de cette base.

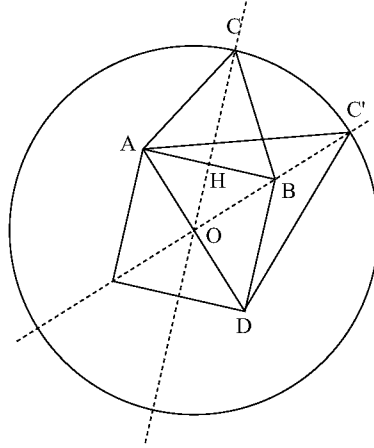


2.b) Soit r le rayon du cercle sur lequel sont situés C et C' les positions possibles de la caméra. Comparons les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AC'D}$ en posant $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ et $\beta = \frac{1}{2}\widehat{AC'D}$.

Si a est la longueur du côté du carré, alors : $CH = r - \frac{a}{2}$

donc $\tan \alpha = \frac{BH}{CH} = \frac{\frac{a}{2}}{r - \frac{a}{2}} = \frac{a}{2r - a}$ et

$$\tan \beta = \frac{OD}{OC'} = \frac{a \frac{\sqrt{2}}{2}}{r} = \frac{a}{r\sqrt{2}}.$$



Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha \geq \beta &\Leftrightarrow \tan \alpha \geq \tan \beta \Leftrightarrow \frac{a}{2r-a} \geq \frac{a}{r\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2r-a \leq r\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow r(2-\sqrt{2}) \leq a \Leftrightarrow r \leq \frac{a}{2-\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow r \leq \frac{a(2+\sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{3a}{2} \leq r < \frac{a(2+\sqrt{2})}{2} &\quad \text{alors } \widehat{ACB} > \widehat{AC'D}. \\ \text{Si } r = \frac{a(2+\sqrt{2})}{2} &\quad \text{alors } \widehat{ACB} = \widehat{AC'D}. \\ \text{Si } r > \frac{a(2+\sqrt{2})}{2} &\quad \text{alors } \widehat{ACB} < \widehat{AC'D}. \end{aligned}$$