

CLERMONT-FERRAND

Exercice n° 1

Enoncé

Qui joue gagne !

1. Le système de numération que nous utilisons usuellement est le système décimal ou système à *base dix*.
On utilise pour écrire les nombres 10 chiffres qui sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9.
Dans cette base, l'écriture 2007 signifie que ce nombre est égal à : $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7$.
Mais on peut choisir d'autres bases, par exemple *la base six*. On utilise alors pour écrire les nombres seulement les chiffres de 0 à 5. Par exemple, le nombre qui s'écrit 13143 *en base six* s'écrit $1 \times 6^4 + 3 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 4 \times 6 + 3 = 2007$ en base dix.
On admet qu'un nombre écrit en base dix admet une écriture unique en base six.
Ecrire en base six le nombre qui s'écrit 3779 en base dix.
2. Olympe Hyade joue dans un casino. Elle vient de mettre au point une méthode, qui consiste à jouer 6 fois de suite 1 € le premier jour, 6 fois de suite 6 € le deuxième jour, 6 fois de suite 36 € le troisième jour, 6 fois de suite 216 € le quatrième jour et 6 fois de suite 1296 € le cinquième jour. Si elle gagne à un jeu, on lui rend sa mise plus deux fois sa mise, et si elle perd, elle perd sa mise.
Aucune journée ne l'a vu ni perdre tous les jeux, ni gagner tous les jeux.
 - a. Quel est le gain maximal qu'Olympe Hyade peut espérer à l'issue de ces cinq jours ?
 - b. Quelle est la perte maximale qu'elle peut subir ?
 - c. Après cinq jours, elle a gagné 2007 €. Combien de fois a-t-elle gagné pendant ces 5 jours ?
 - d. Pouvait-elle gagner 10 000 € ?

Solution

1. $3779 = 2 \times 6^4 + 5 \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5$ s'écrit en base six 25255.

2.

a. Le gain maximal est

$$15 - 6 + 90 - 36 + 540 - 216 + 3240 - 1296 + 19440 - 7776 = 13\,995 \text{ €}.$$

b. Le gain minimal est

$$3 - 6 + 18 - 36 + 108 - 216 + 648 - 1296 + 3888 - 7776 = -4\,665 \text{ €}.$$

c. Le 1^{er} jour elle gagne a fois et empoche $3a - 6$ avec $1 \leq a \leq 5$.

Le 2^{ème} jour elle gagne b fois et empoche $3 \times 6b - 36$ avec $1 \leq b \leq 5$.

Le 3^{ème} jour elle gagne c fois et empoche $3 \times 6^2c - 216$ avec $1 \leq c \leq 5$.

Le 4^{ème} jour elle gagne d fois et empoche $3 \times 6^3d - 1296$ avec $1 \leq d \leq 5$.

Le 5^{ème} jour elle gagne e fois et empoche $3 \times 6^4e - 7776$ avec $1 \leq e \leq 5$.

D'où l'équation :

$$\begin{aligned} 2007 &= 3 \times (a + 6b + 6^2c + 6^3d + 6^4e) - (6 + 36 + 216 + 1296 + 7776) \\ &= a + 6b + 6^2c + 6^3d + 6^4e \end{aligned}$$

a, b, c, d et e étant des entiers compris entre 1 et 5 ; on reconnaît les coefficients de l'écriture en base six de 3779 effectuée à la question 1.

Donc Olympe a gagné 5 fois le premier jour, 5 fois le deuxième, 2 fois le troisième 5 fois le quatrième et enfin 2 fois le cinquième jour. Donc Olympe a gagné 19 fois et perdu 11 fois.

d. Non, elle ne pouvait pas gagner 10 000 €, car 10 000 n'est pas un multiple de 3.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Dans mon livre de maths...

Les pages de mon livre de maths sont numérotées de un en un : page 1, page 2, page 3...etc. J'ai additionné tous les numéros de page et j'ai obtenu une somme égale à 2007. Mais j'ai compté deux fois un numéro de page. Lequel ?

Solution

Notons n le nombre de pages et k la page comptée deux fois. On a $1 \leq k \leq n$ et $1 + 2 + \dots + n - 1 + n + k = 2007$, ce qui impose

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leq 2007 \leq \frac{n(n+1)}{2} + n$$

La fonction $f : p \mapsto \frac{p(p+1)}{2} + 1$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $f(62) < 2007 < f(63)$ puisque $f(62) = 1954$ et $f(63) = 2017$. Donc $n < 63$.

De même la fonction $g : p \mapsto \frac{p(p+1)}{2} + p$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $g(61) < 2007 < g(62)$ puisque $g(61) = 1952$ et $g(62) = 2015$. Donc $n > 61$.

Ainsi $n = 62$ et $k = 2007 - \frac{62 \times 63}{2} = 54$. La page 54 a été comptée en double.

Exercice n° 3 (Séries L, ES, STI, STL, STG, SMS)

Énoncé

Dans mon livre de maths...

Ma grand-mère m'a dit qu'à mon âge, elle avait un livre de maths comportant 300 pages et qu'elle en avait compris 95%. En fouillant dans le grenier, j'ai retrouvé ce livre : des pages avaient été rongées par des souris, mais heureusement, la partie non comprise par ma grand-mère était intacte. J'ai lu 90% des pages conservées et il ne me reste plus que la fameuse partie non comprise par ma grand-mère. Au fait combien de pages ont été rongées par des souris ?

Solution

La grand-mère a compris 95% du livre, donc n'en a pas compris 5%, soit 15 pages. Or ces 15 pages à lire représentent 10% de ce qui n'a pas été rongé par des souris. Il y a donc 150 pages intactes et les souris ont rongé $300 - 150$ pages soit 150 pages.

Commentaires

Premier sujet national. Quatre candidats ont abouti ; la première question a posé peu de problèmes ; un nombre significatif d'élèves a trouvé trois des quatre solutions de la question 2 ; la troisième question a été peu abordée

Second sujet national. Aucun candidat n'a complètement réussi cet exercice. De nombreux candidats se sont laissés abuser par la figure et ont bâti un raisonnement en prenant $DC = 2$!

Premier sujet académique. (pour toutes les séries) Il a été abordé par presque tous les candidats, mais en a dérouté beaucoup, peu familiers avec les changements de base et avec le vocabulaire des jeux d'argent (mise, perte, gain). La totalité des questions n'a été résolue complètement que par deux candidats.

Deuxième sujet académique – série S. Les candidats ont abouti à la solution soit en utilisant la formule : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, soit en tapant sur la calculatrice $1 + 2 + 3 + \dots + 60 + 61 + 62$! Peu de candidats toutefois ont prouvé l'unicité de la solution.

Troisième sujet académique – séries autres que S. Alors qu'il n'y avait qu'une seule candidate pour ces séries, plusieurs élèves de première S l'ont résolu.

Bilan

123 élèves représentant 18 lycées étaient inscrits cette année (122 en S et 1 en SMS). 71 seulement étaient présents en raison, essentiellement, des épreuves des TPE placées le même jour dans le département du Cantal. Le nombre d'inscrits marquait une progression par rapport à 2006 (108 inscrits pour 15 lycées).

Un lauréat académique a aussi été lauréat national (1^{er} accessit). Il avait produit un travail abouti pour trois des quatre exercices. Un autre lauréat académique avait aussi obtenu des résultats substantiels pour les quatre exercices. Sa copie a aussi été proposée au jury national. Chacun des six autres lauréats académiques avait résolu au moins un des quatre exercices. Tous ont montré qu'ils étaient capables de prendre des initiatives. A noter que le seul candidat de la série SMS (une candidate !) figure parmi les huit lauréats académiques.