

CAEN

Exercice n° 1 (série S)

Enoncé

Le rugby

Questions préliminaires

Sur une droite (D) , on place dans cet ordre trois points A, B et H distincts deux à deux et (Δ) une droite perpendiculaire à (D) en H . On trace un cercle (C) de rayon R qui vérifie les deux conditions :

- il passe par A et B
- il coupe la droite (Δ) en deux points M et N .

1°) Comparer les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$. (Justifier)

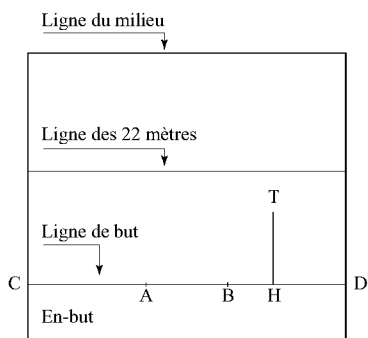
2°) Si le rayon R augmente, dire (sans justification) comment évolue la mesure de l'angle ?

3°) Si le rayon R diminue, que se passe-t-il pour l'angle $\widehat{AMB}$ et pour les points M et N ?

On admettra la relation suivante : soit une droite (Δ) tangente au point T à un cercle (C) , A et B deux points de (C) et H le point d'intersection entre la droite (Δ) et la droite (AB) , on a la relation : $HA \times HB = HT^2$.

Problème

Pour transformer un essai au rugby, le botteur doit se placer en face de l'endroit où l'essai a été marqué (en H sur la figure ci-dessous) et faire passer la balle entre les deux poteaux A et B . *Pour simplifier on négligera la hauteur de la barre horizontale.*



On a : AB (largeur de poteaux) = 5,6 m et CD (largeur du terrain) = 70 m.

Le problème n'a un sens que dans le cas où H est entre B et D .

On note : $BH = x$ et $HT = y$.

← Plan partiel d'un terrain de rugby

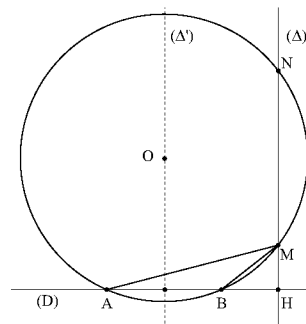
- 1°) Montrer que se placer en T , point défini dans les préliminaires, est la meilleure position, c'est-à-dire celle où l'angle sous lequel le botteur voit les deux poteaux est le plus grand.
- 2°) Exprimer la distance y en fonction de x pour que l'angle sous lequel le botteur voit les deux poteaux soit le plus grand.
- 3°) Dans cette question le point H est en D . Le botteur se place pour voir les poteaux sous l'angle le plus grand. Quelle est alors la longueur minimum du tir ?
- 4°) Sur l'intervalle $[0; 29]$, tracer la représentation de la fonction f définie par $f(x) = x$ et de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x(x + 5,6)}$.
- 5°) Lorsqu'un botteur, qui cherche à ouvrir au maximum son angle de tir, se place sur « la ligne des 22 mètres », que peut-on conjecturer sur l'endroit où a été marqué l'essai ?
- 6°) Lors des matches, pour transformer un essai qui n'a pas été marqué à une distance trop proche du poteau B , le botteur se recule d'une distance égale à la longueur BH augmentée de 2 ou 3 pas. Justifier cette pratique.

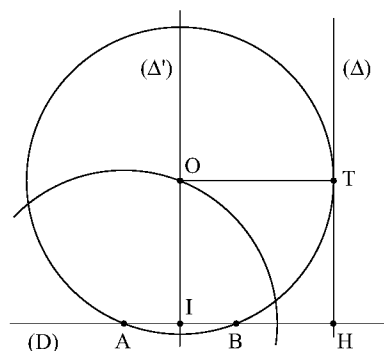
Solution

Questions préliminaires

1°) $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{AB}$: ils sont donc égaux.

2°) Appelons M celui des deux points M et N qui est le plus proche de la droite (D) . Si R augmente, le point M se rapproche de la droite (AB) , l'angle $\widehat{AMB}$ diminue et se rapproche de 0, valeur qu'il atteindrait si M arrivait en H .





orthogonal de O sur (Δ') .

3°) Si R diminue, les points M et N se rapprochent l'un de l'autre. L'angle $\widehat{AMB}$ augmente jusqu'à ce que les deux points M et N soient confondus, c'est-à-dire que le cercle soit tangent à la droite (Δ) .

Le point de tangence est le point T ainsi défini : soit I le milieu de $[AB]$ et (Δ') la médiatrice de $[AB]$; tous les points de (Δ') sont à la distance IH de (Δ) ; soit O l'un des points d'intersection de (Δ') et du cercle de centre A et de rayon IH ; T est le projeté

Problème

1°) D'après le 2°) et le 3°) des questions préliminaires, l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum lorsque M est en T .

2°) On donne, à la fin des questions préliminaires, la relation $HA \times HB = HT^2$. En exprimant cette relation en fonction de x et y , on obtient $(x + 5,6) \times x = y^2$ qui peut s'écrire, puisque y est un nombre positif, $y = \sqrt{x(x + 5,6)}$.

3°) Quelle que soit la position du point H , lorsque le botteur est au point T correspondant, la longueur minimum du tir est la longueur BT .

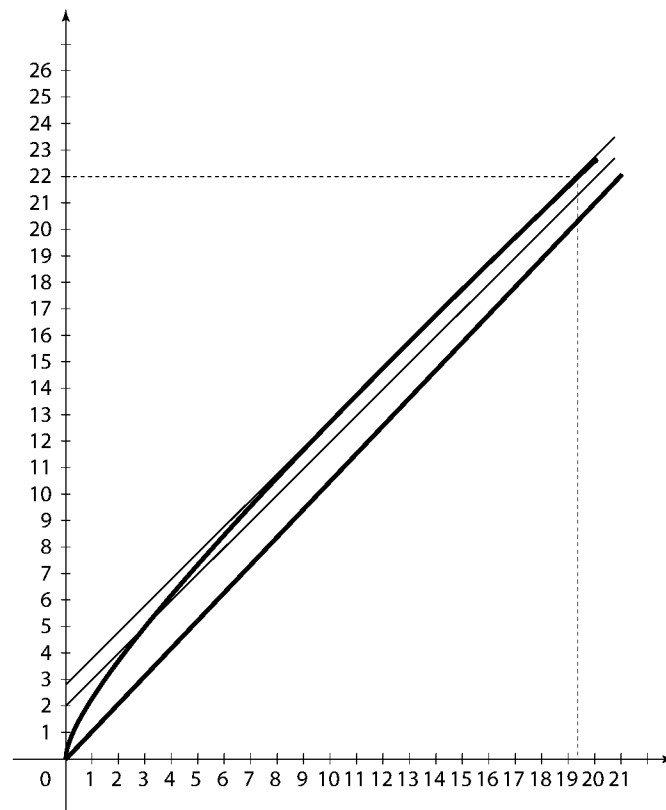
$$\text{Or } BT^2 = BH^2 + HT^2 = x^2 + y^2, \\ \text{d'où } BT = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x(x + 5,6)} = \sqrt{2x^2 + 5,6x}.$$

La longueur minimum du tir est donc $\sqrt{2 \times 32,2^2 + 5,6 \times 32,2}$ soit 47,5 m à 10^{-1} près.

4°) Voir page suivante le tracé des courbes demandées.

5°) Si le botteur se place sur la ligne des 22 mètres, ceci signifie que la valeur de y dans ce cas est 22. x vérifie donc, $\sqrt{x(x + 5,6)} = 22$ qui équivaut à $x^2 + 5,6x - 22^2 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1967,36$ et pour solutions $\frac{1}{2}(-5,6 + \sqrt{1967,36})$ et $\frac{1}{2}(-5,6 - \sqrt{1967,36})$. x étant une longueur, seule la solution positive nous intéresse. On trouve donc $\frac{1}{2}(-5,6 + \sqrt{1967,36})$, soit $x \approx 19,4$ m à 10^{-1} près.

Une lecture graphique sur la courbe de la fonction g , de l'abscisse du point d'ordonnée 22 conduit au même résultat (pointillés sur le dessin), une unité plus grande étant toutefois nécessaire pour une lecture à 10^{-1} près.



On a tracé sur ce dessin, en trait gras, les deux courbes demandées, mais aussi, en trait plus fin, les droites d'équations $y = x + 2$ et $y = x + 2,8$ qui seront utiles pour la question 6°).

6°) Pour tout x , $x^2 + 5,6x < x^2 + 5,6x + 2,8^2$, donc $\sqrt{x^2 + 5,6x} < \sqrt{(x + 2,8)^2}$, d'où $g(x) < x + 2,8$.

D'autre part, $5,6x \geq 4x + 4 \Leftrightarrow 1,6x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2,5$.

Donc, lorsque $x \geq 2,5$, $x^2 + 5,6x > x^2 + 4x + 4$, d'où $\sqrt{x^2 + 5,6x} > \sqrt{(x + 2)^2}$.

On voit donc que, si $x \geq 2,5$, $x + 2 \leq g(x) < x + 2,8$, ce qui signifie que la distance HT est égale à x augmenté d'une longueur comprise entre 2 m et 2,80 m, ce qui est de l'ordre de grandeur de 2 ou 3 pas.

On peut aussi faire la même constatation sur le dessin en traçant les deux droites d'équations $y = x + 2$ et $y = x + 2,8$. La courbe de g , pour tous les points d'abscisse supérieure à 2,5, est comprise entre les deux droites.

Exercice n° 2 (séries autres que S)

Énoncé

Des carrés parfaits

1, 4, 9, 16, 25 ... sont des carrés parfaits.

2, 3, 5, 6, 7 ... ne sont pas des carrés parfaits.

Le but de l'exercice est de déterminer des entiers naturels non nuls a et n (avec $a < n$) de telle sorte que les trois entiers naturels distincts $n - a$, n et $n + a$ soient des carrés parfaits.

Le triplet $(n - a, n, n + a)$ est appelé une solution du problème.

1°) Peut-on trouver une solution pour $n = 9$? Pour $n = 16$? Pour $n = 25$?

2°) Soit k, p, q, r des entiers strictement positifs. Prouver que si (p^2, q^2, r^2) est une solution du problème alors $((kp)^2, (kq)^2, (kr)^2)$ en est une autre.

3°) En déduire 3 solutions du problème.

4°) Trouver une solution du problème telle que $n + a = 529$.

5°) On cherche toutes les solutions de la forme $(1, q^2, r^2)$.

A l'aide d'une calculatrice, trouver toutes les solutions telles que $q \leq 250$.

Solution 1

1°) Si $n = 9$, $n - a$ qui doit être un carré parfait inférieur à 9 peut être égal à :

- 1, auquel cas $n + a$ est égal à 17 qui n'est pas un carré parfait
- 4, auquel cas $n + a$ est égal à 14 qui n'est pas un carré parfait.

Il n'y a donc pas de solution pour $n = 9$.

Si $n = 16$, $n - a$ qui doit être un carré parfait inférieur à 16 peut être égal à :

- 1, auquel cas $n + a$ est égal à 31 qui n'est pas un carré parfait
- 4, auquel cas $n + a$ est égal à 28 qui n'est pas un carré parfait
- 9, auquel cas $n + a$ est égal à 23 qui n'est pas un carré parfait.

Il n'y a donc pas de solution pour $n = 16$.

Si $n = 25$, $n - a$ qui doit être un carré parfait inférieur à 25 peut être égal à :

- 1, auquel cas $n + a$ est égal à 49 qui est un carré parfait
- 4, auquel cas $n + a$ est égal à 46 qui n'est pas un carré parfait
- 9, auquel cas $n + a$ est égal à 41 qui n'est pas un carré parfait
- 16, auquel cas $n + a$ est égal à 34 qui n'est pas un carré parfait.

Il existe une solution pour $n = 25$, c'est le triplet $(1, 25, 49)$.

2°) Si (p^2, q^2, r^2) est un triplet solution, ceci signifie que les différences $r^2 - q^2$ et $q^2 - p^2$ sont égales (c'est le nombre a de la définition d'un triplet solution donnée dans le texte).

Alors $k^2(r^2 - q^2) = k^2(q^2 - p^2)$ donc $k^2r^2 - k^2q^2 = k^2q^2 - k^2p^2$ ou encore

$(kr)^2 - (kq)^2 = (kq)^2 - (kp)^2$, ce qui signifie que le triplet $((kp)^2, (kq)^2, (kr)^2)$ est solution du problème.

3°) On sait que $(1, 25, 49)$ est solution donc, d'après la question précédente, on obtient de nouveaux triplets solutions en utilisant différentes valeurs de k :

- avec $k = 2$, on obtient $(4, 100, 196)$
- avec $k = 3$, on obtient $(9, 225, 441)$
- avec $k = 4$, on obtient $(16, 400, 784)$.

4°) On cherche un triplet solution tel que $n + a = 529 = 23^2$.

On cherche donc deux nombres entiers p et q , $p < q < 23$, tels que $n = q^2$ et $n - a = p^2$ vérifiant donc $23^2 - q^2 = q^2 - p^2$, qui équivaut à $q^2 = \frac{1}{2}(23^2 + p^2)$.
On peut remarquer que p ne peut être pair. En effet, dans ce cas, p^2 serait pair, $23^2 + p^2$ serait impair et $\frac{1}{2}(23^2 + p^2)$ ne serait pas un entier.

On peut remarquer aussi que le chiffre des unités de p ne peut être un 5. En effet, dans ce cas, le chiffre des unités de p^2 serait aussi un 5, celui de $23^2 + p^2$ serait un 4 et celui de $\frac{1}{2}(23^2 + p^2)$ serait un 2 ou un 7. Or aucun carré parfait n'a 2 ou 7 pour chiffre des unités.

Il reste donc 9 possibilités pour p que nous allons envisager l'une après l'autre en regardant dans chaque cas si $\frac{1}{2}(23^2 + p^2)$ est un carré parfait. p

p	1	3	7	9
$\frac{1}{2}(23^2 + p^2)$	265	269	289=17 ²	305

11	13	17	19	21
325	349	409	445	485

Il existe donc une seule solution pour $p = 7$ et $q = 17$. Les nombres n et a sont alors respectivement 289 et 240.

Le triplet solution du problème trouvé est $(49, 289, 529)$.

5°) Le triplet $(1, q^2, r^2)$ est solution du problème si et seulement si r et q sont des entiers tels que $r^2 - q^2 = q^2 - 1$ qui peut s'écrire $r^2 = 2q^2 - 1$ ou encore, puisque r est positif, $r = \sqrt{2q^2 - 1}$. r^2 est donc un carré parfait à condition que $\sqrt{2q^2 - 1}$ soit un entier.

Il suffit donc d'examiner toutes les valeurs de q , entier tel que $2 \leq q \leq 250$, en regardant dans chaque cas si $\sqrt{2q^2 - 1}$ est un entier.

Le programme suivant donne les 3 bonnes réponses en moins d'une minute :

```
For (q,2,250)
  sqrt(2q^2-1) -> r
  If int(r) = r
    Disp q,r
  End
```

Les valeurs affichées sont $\boxed{5,7}$, $\boxed{29,41}$, $\boxed{169,239}$.

Les solutions sont donc les triplets

$\boxed{(1, 25, 49), (1, 841, 1681) \text{ et } (1, 28561, 57121)}$.

Solution 2 (avec calculatrice – André Guillemot)

1) Si $n = 9$, $n - a = 4$ ou 1 donc $n + a = 14$ ou 17 qui ne sont pas des carrés parfaits.

Donc pour $n = 9$ pas de solution.

Si $n = 16$, $n - a = 1, 4$ ou 9 donc $n + a = 23$ ou 28 ou 31 qui ne sont pas des carrés parfaits.

Donc pour $n = 16$ pas de solution.

Si $n = 25$, $n - a = 1, 4, 9$ ou 16 ou 21 donc $n + a = 34$ ou 41 ou 46 ou 49 .

Donc pour $n = 25$ il y a une solution $(1, 25, 49)$.

2) Si (p^2, q^2, r^2) est un solution du problème, $r^2 - q^2 = q^2 - p^2$ Multiplions cette égalité par k^2 . On a $(kr)^2 - (kq)^2 = (kq)^2 - (kp)^2$, ce qui entraîne que $((kp)^2, (kq)^2, (kr)^2)$ est aussi une solution du problème.

3) En utilisant les résultats des questions précédentes, voici trois nouvelles solutions au problème. $(4, 100, 196)$; $(9, 225, 441)$; $(16, 400, 784)$.

4) $529 = 23^2$. $n + a = 529$ et $a \geq 1$ donc $n \leq 528$. Comme n est un carré parfait, n est au plus égal à 22^2 .

Comme $n - a$ et $n + a$ sont positifs strictement, cela entraîne que $2a < 529$ donc que $n \geq \frac{529}{2}$.

Comme n est un carré parfait, n est supérieur ou égal à 17^2 .

Avec ces contraintes il y a 6 valeurs possibles pour n : $17^2, 18^2, 19^2, 20^2, 21^2$, ou 22^2 .

A l'aide des listes de la calculatrice regardons si pour un n donné, $n - a = 2n - 529$ est un carré parfait.

seq(N,N,17,22)→L				L1	L2	L3	1
1				17	289	7	
(17 18 19 20 21...				18	324	10.909	
L1²→L₂				19	361	13.892	
(289 324 361 400...				20	400	16.462	
[(2L₂-529)→L₃				21	441	18.788	
(7 10.90871211 ...				22	484	20.952	
				L1(7)=			

Il en résulte qu'il n'existe qu'une solution : $(7^2, 17^2, 23^2)$ telle que $n + a = 529$.

5) On recherche les nombres q inférieurs ou égaux à 250 tels que $2q^2 - 1$ soit un carré parfait. (Ou bien que $2q^2 - 1$ soit un entier.)

1^{ère} méthode : A l'aide de la table de valeurs de la fonction $f(x) = 2x^2 - 1$. On entre dans Y1 la fonction $2X^2 - 1$ et on fait défiler la table de valeurs de $X = 2$ jusqu'à $X = 250$.

X	Y1	
2	2.6458	
3	4.1231	
4	5.5628	
5	7.0649	
6	8.4261	
7	9.6489	
8	11.269	
Y1=7		

X	Y1	
25	35.341	
26	36.756	
27	38.171	
28	39.585	
29	41.000	
30	42.415	
31	43.829	
Y1=41		

X	Y1	
166	234.76	
167	236.17	
168	237.59	
169	239.01	
170	240.41	
171	241.83	
172	243.24	
Y1=239		

X	Y1	
236	333.75	
237	335.17	
238	336.59	
239	338.01	
240	339.41	
241	340.82	
242	342.24	
Y1=337.995562101		

Attention : la table de valeurs peut induire en erreur ! Pour $X = 239$ (dernier écran), on pourrait s'attendre à avoir une solution mais un contrôle plus précis nous permet de dire que non car en fait 338 est la valeur arrondie de 337,995562...

2^{ème} méthode : En utilisant un programme.

PROGRAM:CAEN	
:For(Q,2,250)	
:J(2Q²-1)→R	
:If fPart(R)=0	
:Disp {1,Q²,R²}	
:End	
:■	

PrgrMCAEN	
(1 25 49)	
(1 841 1681)	
(1 28561 57121)	
Done	
■	

Cette question a donc trois solutions : $(1, 25, 49)$; $(1, 841, 1681)$ et $(1, 28561, 57121)$

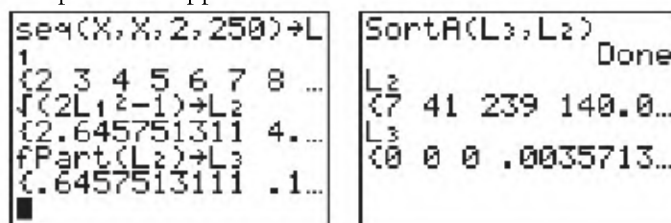
3^{ème} méthode. En utilisant les listes.

En $L1$, les nombres entiers de 2 à 250.

En $L2$, la racine carrée de $(2L^2 - 1)$.

En $L3$, la partie fractionnaire de $L2$.

Il suffit ensuite de classer par ordre croissant, la liste $L3$ associée à la liste $L2$ et d'éditer $L2$ pour voir apparaître en tête de liste les trois éléments solutions.



```

seq(X,X,2,250)→L1
{2 3 4 5 6 7 8 ...
√(2L1²-1)→L2
{2.645751311 4....
fPart(L2)→L3
{.6457513111 .1...

SortA(L3,L2)
Done
L2
{7 41 239 140.0...
L3
{0 0 0 .0035713...
  
```

Remarque (Dominique Roux) :

Ce problème se ramène à rechercher des solutions de l'équation diophantienne $2x^2 + 2y^2 = 2z^2$, avec x et y premiers entre eux. Cette équation admet une infinité de solutions.

Voici un paramétrage : x et y sont impairs et on peut poser $x = X + Y$ et $y = X - Y$, avec X et Y premiers entre eux. L'équation devient : $X^2 + Y^2 = z^2$, équation de Pythagore dont la solution générale est : $X = a^2 - b^2$, $Y = 2ab$ ou $X = 2ab$ et $Y = a^2 - b^2$, s'où $z = a^2 + b^2$, $x = a^2 - b^2 + 2ab$ et $y = |a^2 - b^2 - 2ab|$. Exemple : $a = 3$, $b = 2$ donne : $x = 17$, $y = 7$, $z = 13$.

Exercice n° 3 (séries autres que S)

Enoncé

Des triangles équilatéraux

Soit $A_0B_0C_0$ un triangle équilatéral tel que $A_0B_0 = 1$ (exprimé en unité de longueur).

On définit les points A_1, B_1 et C_1 les milieux respectifs des côtés $[A_0B_0]$, $[B_0C_0]$ et $[C_0A_0]$, puis les points A_2, B_2 et C_2 les milieux respectifs des côtés $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$ et $[C_1A_1]$, et ainsi de suite, on définit les points A_n, B_n et C_n .

1°) Montrer que C_2 puis A_3 appartiennent à la droite (A_0B_1) .

2°) Soit a_n l'aire du triangle $A_nB_nC_n$.

Existe-t-il un entier naturel n tel que $a_n = \frac{\sqrt{3}}{16384}$?

3°) Montrer que tous les triangles $A_nB_nC_n$ ont le même centre de gravité G .

4°) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que le triangle $A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0}$ soit à l'intérieur du cercle de centre G et de rayon 10^{-3} .

Solution

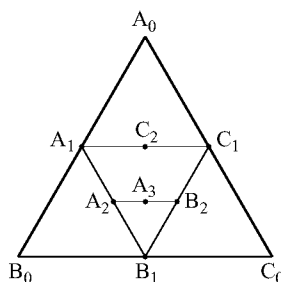
1°) D'après le théorème de la droite des milieux exprimé vectoriellement, comme A_1 est le milieu de $[B_0A_0]$ et B_1 le milieu de $[B_0C_0]$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0}$.

Or C_1 est le milieu de $[A_0C_0]$, d'où $\overrightarrow{A_0C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0}$.

Donc $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_0C_1}$, ce qui prouve que $A_1B_0C_1A_0$ est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent en leur milieu. Alors C_2 qui est le milieu de $[A_1C_1]$ est aussi le milieu de $[A_0B_1]$ et se trouve donc sur la droite (A_0B_1) .

La démonstration précédente prouve aussi (il suffit pour cela de changer le nom des points), par exemple, que A_2 se situe sur (B_0C_1) .

Elle prouve aussi, de la même manière, que A_3 se situe sur (B_1C_2) . Mais, comme on sait que C_2 est sur (A_0B_1) , on en déduit que A_3 est sur (A_0B_1) .



2°) Le triangle $A_0B_0C_0$ est équilatéral. Montrons qu'il en est de même pour tout triangle $A_nB_nC_n$.

D'après le théorème de la droite des milieux, $A_1C_1 = \frac{1}{2}B_0C_0$, $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_0C_0$ et $B_1C_1 = \frac{1}{2}A_0B_0$.

Comme on sait que $A_0B_0 = B_0C_0 = A_0C_0$, alors $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$, donc $A_1B_1C_1$ est équilatéral.

Le même procédé de construction se répétant à chaque étape, on en déduit que tous les triangles $A_nB_nC_n$ sont équilatéraux.

D'après ce qu'on vient de voir, les côtés des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_0B_0C_0$ sont dans le rapport $\frac{1}{2}$, donc leurs aires sont dans le rapport $\frac{1}{4}$, soit $a_1 = \frac{1}{4}a_0$.

De la même manière, le même procédé de construction se répétant à chaque étape, pour tout n , $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}$, c'est-à-dire que la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } a_0 = \text{aire}(A_0B_0C_0) &= \frac{1}{2}B_0C_0 \times A_0B_1 \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout n , $a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$.

Or $16\,384 = 2^{14} = 4^7$.

$\frac{\sqrt{3}}{16\,384}$ est donc l'aire de $A_n B_n C_n$ pour $n+1 = 7$; c'est l'aire de $A_6 B_6 C_6$.

3°) Soit G le centre de gravité de $A_0 B_0 C_0$.

On sait que $\overrightarrow{A_0 G} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A_0 B_1}$. Donc $\overrightarrow{B_1 G} = \frac{1}{3} \overrightarrow{B_1 A_0}$ d'où $\overrightarrow{B_1 G} = \frac{2}{3} \overrightarrow{B_1 C_2}$ puisque C_2 est le milieu de $[A_0 B_1]$.

Or C_2 est le milieu de $[A_1 C_1]$. Donc la dernière égalité vectorielle prouve que G est le centre de gravité de $A_1 B_1 C_1$.

On en déduit, puisque le même procédé de construction est utilisé à chaque étape, que G est le centre de gravité de tous les triangles $A_n B_n C_n$.

4°) Le rayon du cercle circonscrit au triangle $A_n B_n C_n$ est GA_n et $GA_n = \frac{2}{3} h_n$ où h_n est la hauteur du triangle $A_n B_n C_n$.

Or les côtés des triangles $A_n B_n C_n$ et $A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$ étant dans le rapport $\frac{1}{2}$, leurs hauteurs sont aussi dans le rapport $\frac{1}{2}$.

On peut donc écrire $h_n = \frac{1}{2} h_{n-1}$, d'où $h_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n h_0$.

Or $h_0 = A_0 B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $h_n = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$.

La condition du problème est vérifiée si et seulement si $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}} < 10^{-3}$ qui équivaut à $2^n > \frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^3$.

Or $0,577 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 0,578$ donc $577 < \frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^3 < 578$, et $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$.

Le plus petit entier cherché est donc 10.