

BORDEAUX

Exercice n° 1

Enoncé

Le plus grand produit

N est un entier naturel non nul. Il se décompose de plusieurs façons comme somme d'entiers naturels. Pour chacune de ces décompositions, on effectue le produit des entiers non nuls et on note $P(N)$ le plus grand produit réalisé parmi toutes les décompositions de N .

Par exemple, pour $N = 4$:

Décomposition	Produit
$1 + 1 + 1 + 1$	1
$1 + 1 + 2$	2
$2 + 2$	4
$1 + 3$	3
4	4

Ainsi $P(4) = 4$.

- 1) Montrer que quel que soit l'entier N , on a $P(N+1) > P(N)$
- 2) Déterminer $P(16), P(17), P(18)$ en expliquant la démarche.
- 3) À partir de quelle valeur de N , $P(N)$ dépasse-t-il 2007 ?

Solution 1

Pour la première question, supposons que $P(N)$ est le produit de k entiers supérieurs à 1 alors le produit obtenu en ajoutant 1 à l'un de ces k entiers est strictement supérieur à $P(N)$.

La deuxième question doit permettre d'aboutir à la conclusion suivante : si $N = 3k$, alors $P(N) = 3^k$; si $N = 3k + 1$, alors $P(N) = 4 \times 3^{k-1}$ et si $N = 3k + 2$, alors $P(N) = 3^k \times 2$.

Pour la dernière question, on trouve $N = 21$.

Solution 2 (Abderrahim Ouardini)

Existence de $P(N)$

Pour N entier naturel non nul, il existe un nombre fini de manières d'écrire N comme somme de nombres entiers positifs, donc il existe un plus grand nombre parmi les produits respectifs.

Soit $a_1, \dots, a_p$ ($p \geq 2$) des entiers naturels non nuls dont la somme est N et qui vérifient l'égalité $P(N) = a_1 \dots a_p$.

On a :

$$N + 1 = a_1 + \dots + a_p + 1 = a_1 + \dots + a_{p-1} + (a_p + 1),$$

comme :

$$a_1 \times \dots \times a_{p-1} \times (a_p + 1) > a_1 \times \dots \times a_{p-1} \times a_p = P(N),$$

alors, on a une décomposition de l'entier $N+1$ comme somme d'entiers naturels non nuls et dont le produit est strictement supérieur à $P(N)$ par conséquent $P(N+1) > P(N)$ (Plus loin on va améliorer cette inégalité)

Monotonie de la suite $(P(N))_{N \in \mathbb{N}}$

2. Traitons le problème dans le cas général, soit S un entier naturel non nul, qui s'écrit comme une somme d'entiers naturels non nuls $S = k_1 + k_2 + \dots + k_p$, et tel que le produit $P = k_1 \times k_2 \times \dots \times k_p$ est maximum.

Quitte à changer l'indexation, on peut supposer que $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p$.

Si $k_1 = 1$, alors en supprimant k_1 et en remplaçant k_2 par $k_2 + 1$, la somme S reste inchangée, mais le produit P augmente puisque $1 \times k_2 < k_2 + 1$. Contradiction.

Donc pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ $k_i \geq 2$.

Si $k_1 \geq 5$, alors dans le produit P le facteur k_1 peut être remplacé par deux facteurs égaux à 2 et à $k_1 - 2$, dans ce cas on ne modifie pas la somme S , mais comme $2(k_1 - 2) = k_1 + (k_1 - 4) \geq k_1 + 1 > k_1$, alors le produit P augmente. Contradiction.

Donc pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ $k_i \leq 4$.

S'il existe $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $k_j = 4$, en remplaçant k_j par 2×2 , les nombres S et P restent les mêmes.

Donc le produit P est de la forme $2^r \times 3^s$ où r et s sont des entiers naturels.

Si $r \geq 3$, alors dans la somme S on peut remplacer $2+2+2$ par $3+3$ et comme $2+2+2 < 3+3$, il résulte qu'on obtient un produit strictement supérieur à P (pour une même somme S). Ce qui est impossible.

Donc le produit P est de la forme $2^r \times 3^s$ où $r \in \{0, 1, 2\}$ et s un entier naturel.

Ainsi, $P(N)$ est donné par :

$$P(N) = \begin{cases} 3^k & \text{si } N = 3k, \\ 4 \times 3^{k-1} & \text{si } N = 3k + 1 = 3(k-1) + 4, \\ 2 \times 3^k & \text{si } N = 3k + 2. \end{cases}$$

Guillaume Hubert Macaigne élève au lycée St Cricq - PAU 64, a retrouvé sans justification cette formule, les décompositions correspondantes sont :

$$S = \underbrace{3 + \dots + 3}_{k \text{ termes}}; S = 2 + 2 + \underbrace{3 + \dots + 3}_{k-1 \text{ termes}}; S = 2 + \underbrace{3 + \dots + 3}_{k \text{ termes}}.$$

d'où ; $P(16) = P(2^4) = 4 \times 3^4 = 324$, $P(17) = 2 \times 3^5 = 486$ et $P(18) = 3^6 = 729$.

3. On a $P(20) = 2 \times 3^6 = 1458 < 2007$ et $P(21) = 3^7 = 2187 > 2007$, donc c'est à partir de 21 que l'entier $P(N)$ dépasse 2007.

Quelques prolongements.(Abderrahim Ouardini)

Proposition. Pour n entier naturel non nul, on a les propriétés suivantes :

1. $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{4}{3}$ si et seulement si n est de la forme $3p$.
2. $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{3}{2}$ si et seulement si n est de la forme $3p+1$ ou $3p+2$.
3. $P(n+1) \geq \frac{4}{3}P(n)$.
4. $P(n+1) - P(n) \geq 3^{\lfloor n/3 \rfloor - 1}$.
([t] désigne la partie entière du réel t)
5. $P(n+2) \geq 2P(n)$
6. Les nombres $P(n), P(n+1), P(n+2)$ peuvent être les mesures des côtés d'un triangle.

Preuve de la proposition.

Preuves de 1 et 2. 1 et 2 résultent des égalités suivantes :

$$\frac{P(3p+1)}{P(3p)} = \frac{4 \times 3^{p-1}}{3^p} = \frac{4}{3}, \frac{P(3p+2)}{P(3p+1)} = \frac{2 \times 3^p}{4 \times 3^{p-1}} = \frac{3}{2}, \frac{P(3p+3)}{P(3p+2)} = \frac{3^{p+1}}{2 \times 3^p} = \frac{3}{2}.$$

où p est un entier naturel non nul.

Preuve de 3.

En combinant les égalités 1 et 2, on obtient l'inégalité 3.

Preuve de 4.

L'égalité 4 résulte des égalités suivantes :

$$P(3p+1) - P(3p) = \frac{1}{3} \times 3^p, P(3p+2) - P(3p+1) = \frac{2}{3} \times 3^p, P(3p+3) - P(3p+2) = 3^p$$

et du fait que $p = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$:

Preuve de 5.

Par disjonction de cas et en utilisant **1** et **2**.

Preuve de 6. Il suffit de prouver que $P(n) + P(n+1) > P(n+2)$, ce qui est équivalent à (en utilisant **6**) : $P(n) + P(n+1) > 2P(n)$, ou encore $P(n+1) > P(n)$, ce qui est vrai.

Bibliographie

1. István Reiman

International Mathematical Olympiad 1959-1999

Translated by : János Pataki, András Stipsitz, Csaba Szabó Anthem Press, London, 2002

2. Joachim Llorca

Morceaux choisis de Mathématiques

Ed. Ellipses. Paris 2002

Exercice n° 2

Énoncé

Dans un triangle

Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. M est un point du segment $[BC]$, P et Q désignent les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (AC) et (AB) .

- 1) Montrer que si le point M est sur le diamètre issu de A du cercle circonscrit au triangle ABC , alors la droite (PQ) est parallèle à (BC) .
- 2) a) Montrer que les points A, Q, M et P sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
b) Montrer que $PQ = AM \times \sin(\widehat{BAC})$.
c) En déduire toutes les positions du point M pour lesquelles la somme des diagonales du quadrilatère $AQMP$ est minimale.
- 3) Déterminer toutes les positions du point M pour lesquelles l'aire du quadrilatère $AQMP$ est maximale.

Solution 1

Pour la première question, si on note D le point diamétralement opposé à A , on montre que (BD) est parallèle à (MQ) , (DC) est parallèle à (MP) et donc (QP) parallèle à (BC) .

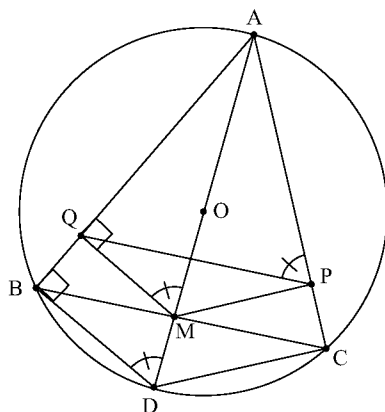
Ou bien : Soit D le point diamétralement opposé à A par rapport au cercle

circonscrit au triangle ABC on a :

$\widehat{APQ} = \widehat{AMQ}$ (les points A, P, M et Q sont cocycliques) $\widehat{AMQ} = \widehat{ADB}$ (les droites (QM) et (BD) sont parallèles)

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (les points A, B, D et C sont cocycliques), donc :

$\widehat{APQ} = \widehat{ACB}$, ce qui prouve que les droites (PQ) et (BC) sont parallèles.



Le résultat obtenu au début de la deuxième question permet de remarquer que la somme des diagonales est minimale lorsque AM est minimale donc lorsque M est le pied de la hauteur issue de A dans ABC .

Pour la troisième question l'aire de $AQMP$ est maximale lorsque la somme des aires de CMP et MQB est minimale.

Posons $BM = x$, on a $BQ = x \cos \hat{B}$ et $QM = x \sin \hat{B}$ donc :

$$\text{Aire}(BQM) = \frac{x^2 \sin \hat{B} \cos \hat{B}}{2} = \frac{x^2}{4} \sin 2\hat{B} \text{ et de façon similaire, on a aussi :}$$

$$\text{Aire}(PCM) = \frac{(a-x)^2 \sin \hat{C} \cos \hat{C}}{2} = \frac{(a-x)^2}{4} \sin 2\hat{C}.$$

Ayant posé $BC = a$, notre problème revient à minimiser la somme

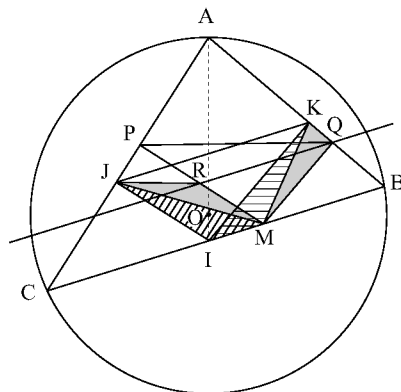
$$f(x) = \frac{x^2}{4} \sin 2\hat{B} + \frac{(a-x)^2}{4} \sin 2\hat{C} \text{ où } f \text{ est une fonction définie sur l'intervalle }]0, a[.$$

Un calcul de dérivée nous donne : $f'(x) = 2 \left(\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C} \right) x - 2a \sin 2\hat{C}$,

et on vérifie bien que pour $x_0 = \frac{a \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} \in]0, a[$ la fonction admet un minimum absolu sur l'intervalle $]0, a[$. On peut aussi obtenir le résultat en cherchant le minimum d'un trinôme.

Solution 2 (Avec des aires – Claude Felloneau–)

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , I le point de $[BC]$ aligné avec A et O , J le projeté orthogonal I sur (AC) et K le projeté orthogonal de I sur (AB) . D'après la question 1, (KJ) est parallèle à (BC) .



- si M appartient à $[BI[$, $\text{aire}(IMK) = \text{aire}(IMJ)$
 $= \text{aire}(MQK) = \text{aire}(MQI) = \text{aire}(MRI) = \text{aire}(MRJ) < \text{aire}(MPJ)$ où R
est le point d'intersection de $[MP]$ avec la parallèle à (BC) passant par Q .
Par addition : $\text{aire}(IMQK) < \text{aire}(IMPJ)$.
Or $\text{aire}(APMQ) + \text{aire}(IMPJ) - \text{aire}(IMQK) = \text{aire}(IJAK)$.
Donc : $\text{aire}(IJAK) > \text{aire}(IMPQ)$.
 - Même raisonnement si M appartient à $[CI[$.
- L'aire du quadrilatère $AMPQ$ est maximale si et seulement si $M = I$.

Remarque : l'idée d'introduire le point I peut venir :

- d'une exploration avec un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer (mais il n'y en a pas aux olympiades).
- du résultat obtenu dans la solution algébrique proposée puisque le maximum de l'aire est obtenu lorsque :

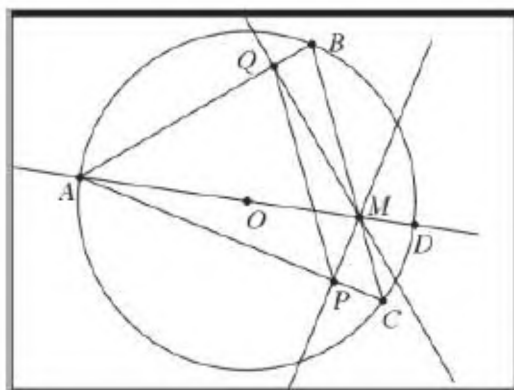
$$\overrightarrow{BM} = \frac{\sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} \overrightarrow{BC},$$

c'est-à-dire lorsque M est le barycentre de $(B, \sin 2\hat{B})$ et $(C, \sin 2\hat{C})$, ainsi lorsque M est à l'intersection de (OA) et $[BC]$ puisqu'il est bien connu (ou facile à démontrer) que O est le barycentre de $(A, \sin 2\hat{A})$, $(B, \sin 2\hat{B})$ et $(C, \sin 2\hat{C})$.

Solution 3 (Avec CALCULATRICE – André Guillemot–)

Pour conjecturer, on fera appel au module de géométrie de la calculatrice TI-Nspire.

- 1) M est sur le diamètre issu de A .



APM et AQM sont deux triangles rectangles de même hypoténuse $[AM]$ donc ils sont inscrits dans le même cercle de diamètre $[AM]$.

$\widehat{APQ} = \widehat{AMQ}$ car ce sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{AQ}$ dans le cercle de diamètre $[AM]$.

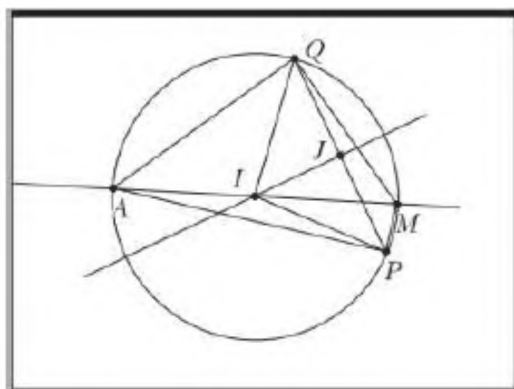
Les droites (QM) et (BD) sont perpendiculaires à (AB) donc elles sont parallèles. Il en résulte que $\widehat{AMQ} = \widehat{ADB}$.

$\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ car ce sont des angles inscrits qui interceptent le même arc dans le cercle circonscrit à ABC .

D'où $\widehat{APQ} = \widehat{ACB}$ ce qui entraîne que les droites (PQ) et (CB) sont parallèles.

2) a) A, P, M et Q sont situés sur le cercle de diamètre $[AM]$, donc le centre est I le milieu de $[AM]$ et le rayon IM .

2) b)



Soit I le milieu de $[AM]$ et J le milieu de $[PQ]$. Le triangle PIQ est isocèle donc IJQ est rectangle en J , donc $QJ = QI \times \sin \widehat{QIJ}$.

$\widehat{QAP}$ et $\widehat{QIP}$ interceptent le même arc, donc $\widehat{QIP} = 2\widehat{QAP} = 2\widehat{QIJ}$.

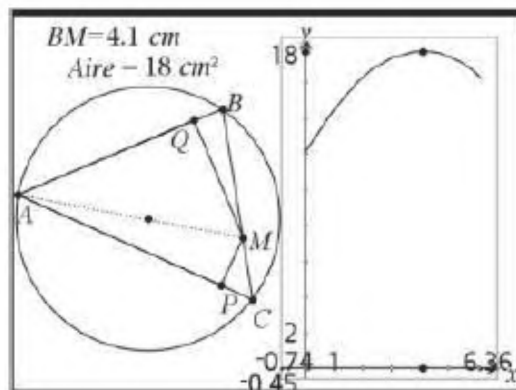
$PQ = 2JQ = 2IQ \times \sin \widehat{QIP} = AM \times \sin \widehat{BAC}$

c) $S = AM + PQ = AM(1 + \sin \widehat{ABC})$. S sera minimale quand la distance AM

sera minimale, c'est-à-dire quand M est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

3) Représentons l'aire de $APMQ$ en fonction de la longueur BM . Dans la partie de gauche, nous avons la figure précédente dans laquelle nous avons fait apparaître la longueur BM et l'aire de $APQM$.

Dans la partie de droite, on a reporté la valeur de BM en abscisse et l'aire en ordonnée, ce qui, en faisant varier M sur $[BC]$ nous donne la représentation de l'aire en fonction de la valeur de BM .



Il semble que le maximum soit obtenu lorsque M est sur le diamètre issu de A .

Démonstration.

Posons $BM = x$, l'aire de $APMQ$ sera maximale quand la somme T des aires des triangles BQM et CPM sera minimale.

BQM est rectangle en Q donc $BQ = BM \times \cos \widehat{QBM}$.

La hauteur issue de Q vaut $BQ \times \sin \widehat{QBM} = x \sin \widehat{QBM} \times \cos \widehat{QBM}$

Donc l'aire de BQM vaut $\frac{hx^2}{2}$ avec $h = \sin \widehat{QBM} \times \cos \widehat{QBM}$

Posons $BC = a$. De la même manière l'aire de MPC vaut $\frac{k(a-x)^2}{2}$ avec $k = \sin \widehat{PCM} \times \cos \widehat{PCM}$.

On a donc $T(x) = \frac{hx^2 + k(a-x)^2}{2}$.

T sera minimale pour la valeur qui annule la dérivée.

$T'(x) = hx - k(a-x)$, $T'(x) = 0$ si $x = \frac{ak}{h+k}$.

Dans ce cas les hauteurs issues de P et de Q des triangles MPC et MQB sont de même longueur : $\frac{ahk}{h+k}$.

Donc la droite (PQ) est parallèle à (BC) .

L'aire de $AQMP$ sera maximale quand M sera sur le diamètre issu de A en utilisant le résultat de la question 1.

Solution 3 (Sans utiliser la dérivation – Abderrahim Ouardini–)

Remarquons que $f(x)$ est un trinôme de second degré en x qui peut s'écrire sous la forme canonique :

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}) x^2 - (2a \sin 2\hat{C}) x + a^2 \sin 2\hat{C} \\ &= (\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}) \left(x^2 - \frac{2a \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} x + \frac{a^2 \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} \right) \\ &= (\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}) \left[\left(x - \frac{a \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} \right)^2 + \frac{a^2 \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} - \left(\frac{a \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &\geq (\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}) \left[\frac{a^2 \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} - \left(\frac{a \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} \right)^2 \right] \\ &= a^2 \sin 2\hat{C} - \frac{(a \sin 2\hat{C})^2}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} = \frac{a^2 \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}}, \end{aligned}$$

ainsi le minimum de f sur l'intervalle $]0, a[$ est $\frac{a^2 \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}}$, et il est atteint

pour la valeur $x_0 = \frac{a \sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}}$.

Prolongements

Dans la suite, on va essayer de donner une caractérisation du point M qui maximise l'aire du quadrilatère $AQMP$. Énonçons la proposition suivante :

Proposition. *L'aire du quadrilatère $AQMP$ est maximale si et seulement si $M = I$, où I est l'intersection du côté $[BC]$ et du diamètre issu de A du cercle circonscrit au triangle ABC .*

Preuve de la proposition.

Première méthode (Abderrahim Ouardini)

Commençons d'abord par exprimer la longueur BI ; la loi des sinus appliquée au triangle AIB peut s'écrire : $\frac{BI}{\sin \widehat{BAI}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AIB}}$, et par application du théorème de l'angle inscrit, on obtient :

$$\widehat{BAI} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ACB} \text{ et } \widehat{AIB} = (\widehat{ABC} + \widehat{BAI}) = \pi - \left(\widehat{ABC} + \frac{\pi}{2} - \widehat{ACB} \right),$$

pour alléger les notations, posons : $\widehat{ABC} = \hat{B}$ et $\widehat{ACB} = \hat{C}$, donc :

$$\frac{BI}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \hat{C} \right)} = \frac{AB}{\sin \left(\hat{B} + \frac{\pi}{2} - \hat{C} \right)},$$

ainsi :

$$BI = \frac{AB \cos \widehat{C}}{\cos(\widehat{B} - \widehat{C})}.$$

Montrons que $x_0 = \frac{AB \cos \widehat{C}}{\cos(\widehat{B} - \widehat{C})}$, où $x_0 = \frac{a \sin 2\widehat{C}}{\sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C}}$. Ce qui revient à montrer que :

$$\frac{\sin \widehat{A} \sin 2\widehat{C}}{\sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C}} = \frac{\sin \widehat{C} \cos \widehat{C}}{\cos(\widehat{B} - \widehat{C})},$$

ou après simplification $\sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C} = 2 \sin \widehat{A} \cos(\widehat{B} - \widehat{C})$.

Enonçons le lemme suivant :

Lemme. *Quels que soient les réels p et q , on a la relation suivante :*

$$\sin 2p + \sin 2q = 2 \sin(p + q) \cos(p - q)$$

Preuve du lemme.

Par un développement du second membres de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 \sin(p + q) \cos(p - q) &= 2(\sin p \cos q + \cos p \sin q)(\cos p \cos q + \sin p \sin q) \\ &= 2(\sin p \cos p \cos^2 q + \cos q \sin q \sin^2 p + \cos q \sin q \cos^2 p + \cos p \sin p \sin^2 q) \\ &= 2(\sin p \cos p + \cos q \sin q) \\ &= \sin 2p + \sin 2q, \text{ ce qui termine la preuve du lemme.} \end{aligned}$$

La remarque $\sin \widehat{A} = \sin(\widehat{B} + \widehat{C})$ et le lemme précédent nous permettent de conclure.

Il existe donc un et un seul point M ($M \in [BC]$) qui maximise l'aire du quadrilatère $AQMP$, à savoir le point I .

Deuxième méthode (Abderrahim Ouardini)

Sans nuire à la généralité du problème, prenons un point M de $[BI]$.

Soit N le point d'intersection des segments $[PM]$ et $[IK]$, on a :

$$\text{Aire}(AJIK) = \text{Aire}(JPNI) + \text{Aire}(APNK)$$

et

$$\text{Aire}(APMQ) = \text{Aire}(NKQM) + \text{Aire}(APNK),$$

donc :

$$\text{Aire}(AJIK) - \text{Aire}(APMQ) = \text{Aire}(JPNI) - \text{Aire}(NKQM).$$

En ajoutant aux aires des quadrilatères $JPNI$ et $NKQM$ l'aire du triangle IMN , on obtient :

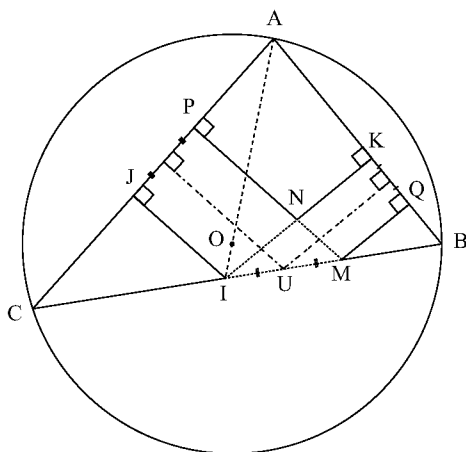
$$\text{Aire}(AJIK) - \text{Aire}(APMQ) = \text{Aire}(IMPJ) - \text{Aire}(IMQK).$$

Désignons par U le milieu du segment $[IM]$, l'aire du trapèze $IMQK$ est :

$$\text{Aire}(IMQK) = (IM \cos \widehat{B})(UB \sin \widehat{B}) = IM \cdot UB \frac{\sin 2\widehat{B}}{2},$$

de même, on a :

$$\text{Aire}(IMPJ) = IM \cdot UC \frac{\sin 2\widehat{C}}{2}.$$



On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(AJIK) > \text{Aire}(APMQ) &\Leftrightarrow \text{Aire}(IMPJ) > \text{Aire}(IMQK) \\ &\Leftrightarrow UC \sin 2\widehat{C} > UB \sin 2\widehat{B} \\ &\Leftrightarrow (BC - UB) \sin 2\widehat{C} > UB \sin 2\widehat{B} \\ &\Leftrightarrow \frac{BC \sin 2\widehat{C}}{\sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C}} > UB. \end{aligned}$$

ce qui est vrai puisque $U \in [BI]$ et $BI = \frac{BC \sin 2\widehat{C}}{\sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C}}$ par la **proposition**.

Commentaires (Abderrahim Ouardini)

Les résultats du problème restent les mêmes dans tous les triangles qui vérifient $\text{mes}\widehat{B} < \frac{\pi}{2}$, $\text{mes}\widehat{C} < \frac{\pi}{2}$ et $\text{mes}\widehat{A} > \frac{\pi}{2}$.

Quand j'ai soumis ce problème au comité d'Olympiades, la question suivante n'a pas été retenue.

« Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Déterminer tous les points M du segment $[BC]$, tels que si P et Q désignent les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (AC) et (AB) , alors les droites (PQ) et (BC) sont parallèles. »

Solution 1 :

Notons D l'intersection du cercle circonscrit à ABC et de la demi-droite $(MK[$. Soit M un point du segment $[BC]$, solution du problème (d'après la **question**

1, le problème admet au moins une solution), on a :

$\widehat{AMQ} = \widehat{APQ}$ (les points A, P, M , et Q sont cocycliques)

$\widehat{APQ} = \widehat{ACB}$ (les droites (PQ) et (BC) sont parallèles)

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (les points A, B, D et C sont cocycliques), donc :

$\widehat{AMQ} = \widehat{ADB}$, ce qui prouve que les droites (QM) et (BD) sont parallèles, ainsi les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires, donc D est le point diamétralement opposé à A .

Solution 2 :

Désignons par E et F les points d'intersection respectifs des droites (PM) , (QM) avec (AB) , (AC) . Remarquons que le point M n'est autre que l'orthocentre du triangle AEF , on a :

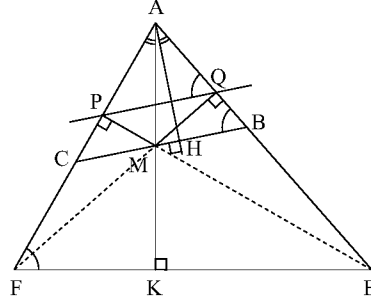
$\widehat{ABC} = \widehat{AQP}$ (les droites (PQ) et (BC) sont parallèles)

$\widehat{AQP} = \widehat{EFA}$ (les points P, Q, E et F sont cocycliques), donc $\widehat{ABC} = \widehat{EFA}$.

En considérant les triangles AKF et ABH , on conclut que les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{BAH}$ sont égaux.

Une construction simple du point M .

Il suffit de tracer la droite symétrique de la hauteur issue du sommet A par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$, et l'intersection de cette droite avec le segment $[BC]$ nous donne le point M .



On a aussi le résultat suivant ² :

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus.

Soit M un point du segment $[BC]$, P et Q désignent les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (AC) et (AB) .

1. Le maximum de l'aire du quadrilatère $AQMP$ est au moins égal à $S \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}$, où S est l'aire du triangle ABC .
2. L'égalité a lieu si et seulement si le triangle ABC est isocèle en A .

²Abderrahim Ouardini – *Mathematical Reflection* - 2007 - University of Nebraska. U.S.A.