

BESANÇON

Recommandations

Il est important que vous argumentiez vos affirmations. Même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt. De même, si vous découvrez une erreur dans vos résultats ou votre démarche, il est bon de le signaler et, si possible, de l'expliquer.

Exercice n° 1

Enoncé

Le jardin

Mon jardin est un rectangle $ABCD$. J'y ai planté un arbre avec un tronc très fin. Mon arbre est situé exactement à 4 mètres de A , à 5,1 mètres de B et à 7,5 mètres de C . A quelle distance de D se trouve-t-il ?

Solution

Notons I le point où est planté l'arbre, E, F, G, H les projetés respectifs de I sur $(AB), (BC), (CD), (DA)$.

$$\begin{aligned} \text{On peut écrire : } & AE^2 + EI^2 = AI^2 \quad (1), \\ & BE^2 + EI^2 = BI^2 \quad (2), \\ & CG^2 + GI^2 = CI^2 \quad (3), \\ & DG^2 + GI^2 = DI^2 \quad (4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } & AE^2 + EI^2 = AI^2 \quad (1), \\ & BE^2 + EI^2 = BI^2 \quad (2), \\ & BE^2 + GI^2 = CI^2 \quad (3), \\ & AE^2 + GI^2 = DI^2 \quad (4). \end{aligned}$$

En effectuant $(1) - (2) + (3) - (4)$, il vient : $AI^2 - BI^2 + CI^2 - DI^2 = 0$
soit $DI^2 = AI^2 - BI^2 + CI^2$; soit $DI^2 = 4^2 - 5,1^2 + 7,5^2$

soit $DI^2 = 16 - 26,01 + 56,25$; soit $DI^2 = 46,24$; soit $DI = 6,8$.

L'arbre est donc situé à 6,80 mètres du sommet D.

Exercice n° 2

Énoncé

Les dés

On appelle **dé-numérique** un dé à six faces, sur lesquelles sont écrits six chiffres différents pris parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ou 9), 7, 8.

On dit que deux dés-numériques sont **semblables** s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

- Les six chiffres écrits sur le premier dé sont les mêmes que les six chiffres écrits sur le second.
- Lorsqu'on pose les deux dés sur une face ayant le même chiffre, on lit sur la face opposée deux chiffres identiques, et ceci quelle que soit la face sur laquelle on pose les dés.

Enfin, on dit que deux dés-numériques sont **distincts** s'ils ne sont pas semblables.

1. Combien existe-t-il de dés-numériques distincts dont les faces sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?
2. Montrer que l'on peut construire deux dés-numériques qui, placés l'un contre l'autre, permettent d'obtenir toutes les dates d'un mois quelconque de l'année : 01, 02, 03, ..., 29, 30, 31. On énumérera les chiffres portés par les faces de chacun des deux dés.
3. Combien existe-t-il de paires de dés-numériques possédant la propriété de la question précédente ? (On considère que deux paires sont identiques lorsque les deux dés de la première paire sont semblables aux deux dés de la deuxième paire.)
4. Déterminer le plus grand entier N tel que l'on peut obtenir tout entier inférieur ou égal à N , à l'aide de deux dés-numériques.

Solution

1. Commençons par compter le nombre de dés ayant les chiffres 1 et 2 sur deux faces opposées. Il existe alors trois possibilités pour la face opposée au chiffre 3 : elle sera numérotée 4, 5 ou 6. La face opposée à 3 étant choisie, il n'existe plus qu'une possibilité pour les deux faces restantes. Il existe donc trois dés ayant les chiffres 1 et 2 sur deux faces opposées. Le choix de 2 étant arbitraire, on peut affirmer que pour $k \in \{6, 5, 4, 3, 2\}$, il existe trois dés ayant les chiffres

1 et k sur deux faces opposées.

Conclusion : Il existe $3 \times 5 = 15$ dés-numériques distincts dont les faces sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Sur les faces du premier dé-numérique, on écrit les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sur les faces du second, on écrit 0, 1, 2, 6, 7, 8. Ces deux dés permettent d'obtenir toutes les dates d'un mois quelconque de l'année.

3. Considérons deux dés numériques permettant d'obtenir toutes les dates d'un mois quelconque de l'année. On note A l'ensemble des chiffres écrits sur les faces du premier dé et B l'ensemble des chiffres écrits sur les faces du deuxième dé. On doit pouvoir obtenir les dates 11 et 22. Il est donc nécessaire que : $1 \in A$, $1 \in B$, $2 \in A$ et $2 \in B$.

Supposons que 0 soit écrit sur un seul des deux dés. Comme on doit pouvoir obtenir les dates 01, 02, 03, 04, 05, 06 et 07, il faudrait que 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 soient écrits sur les faces de l'autre dé, ce qui est impossible vu que ce dé ne possède que six faces. Il est donc nécessaire que : $0 \in A$ et $0 \in B$.

Sur chaque dé, il reste trois faces vierges et six chiffres à écrire : 3, 4, 5, 6, 7 et 8. Quel que soit le choix effectué pour écrire ces six derniers chiffres, il sera toujours possible de lire les 31 dates. On peut considérer que : $3 \in A$. Il reste à choisir deux chiffres parmi 4, 5, 6, 7 et 8 pour compléter A, soit $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilités.

D'après la question 1, pour chacune de ces 10 possibilités, on peut construire 15 dés numériques distincts avec l'ensemble A et autant avec l'ensemble B.

Conclusion : Il existe $10 \times 15 \times 15 = 2\,250$ paires de dés-numériques possédant la propriété de la question 2.

4. D'après la question 3, on a : $N \geq 31$. On remarque que deux dés-numériques permettant d'obtenir tous les entiers de 1 à 31 permettent aussi d'obtenir tous les entiers de 1 à 32, donc $N \geq 32$.

Supposons qu'il existe deux dés-numériques permettant d'obtenir tous les entiers de 1 à 33. On doit pouvoir obtenir le nombre 33. Il est donc nécessaire que 3 (comme 0, 1 et 2) soit écrit sur les deux dés. Il reste donc deux faces vierges sur chaque dé et 5 chiffres à écrire, ce qui est impossible.

Conclusion : $N = 32$.