

AMIENS

Exercice n° 1 (toutes séries)

Enoncé

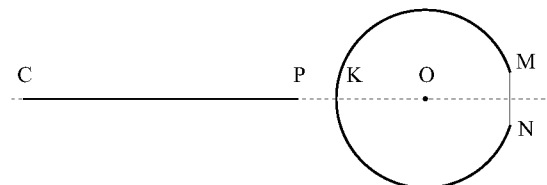
Le chien du gardien de phare

En sortant de son phare le gardien a laissé la porte ouverte, mais il a laissé son chien C (féroce) attaché à un piquet P situé à 2 mètres du pied K du phare avec une chaîne PC de 10 mètres, à l'opposé de la porte dont l'ouverture MN mesure 1 mètre de large.

Je connais bien le gardien mais malheureusement le chien ne me connaît pas.

Vais-je pouvoir entrer pour attendre mon ami ?

Le rayon de la base circulaire du phare est 3 mètres.

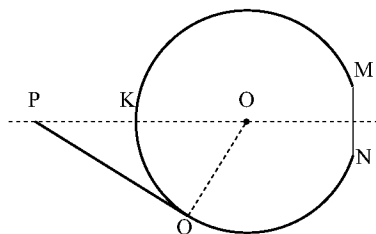


Solution

On fait l'hypothèse – plausible – que la chaîne est attachée au piquet en un point situé à la même hauteur que le cou du chien. De cette façon, lorsque la chaîne se tend, elle se trouve dans un plan parallèle au sol, ce qui simplifie un peu les calculs ! De plus, il nous manque la taille du chien si l'on veut raisonner différemment.

On introduit le point Q tel que la droite (PQ) soit tangente au cercle correspondant au phare. Lorsque le chien se précipite vers l'entrée MN , la chaîne touche donc le phare en Q puis épouse la courbure du phare.

Il s'agit donc de mesurer la somme $PQ + \widehat{QN}$.



On a déjà $PQ = \sqrt{PO^2 - OQ^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Ensuite $\widehat{QON} = 180 - \widehat{QOK} - \widehat{NOx}$. Or $\cos \widehat{QOK} = \frac{OQ}{OP} = \frac{3}{5}$, donc $\widehat{QOK} \approx 53,13^\circ$.

Et $\sin \widehat{NOx} = \frac{1/2(MN)}{ON} = \frac{0,5}{3}$, donc $\widehat{NOx} \approx 9,59^\circ$.

Donc $\widehat{QON} \approx 117,27^\circ$ (la vraie valeur est même légèrement supérieure).

Par une simple proportionnalité, on arrive ainsi à

$$\widehat{QN} = \frac{(2 \times \pi \times 3) \times \widehat{QON}}{360} \approx 6,14.$$

Par conséquent, la somme $PQ + \widehat{QN}$ vaut environ 10,14 m.

Donc le chien ne pourra pas atteindre la porte du phare, ce qui permet donc de rentrer dans le phare sans danger.

Remarque

Si l'on fait l'hypothèse que la chaîne est fixée au sol, elle se tend alors de manière oblique, et le chien se trouve donc encore un peu plus loin de l'entrée du phare. On peut faire les calculs, qui ne sont pas extrêmement difficiles, en sachant que la chaîne touche le phare suivant un point Q' situé à la verticale de Q , et en « déroulant » le phare de manière à tracer une droite $(PQ'M)$ dans un plan, ce qui nous donne la positions de Q' puis la longueur PM ...

Exercice n° 2 (série S)

Enoncé

Cinq nombres à trouver

On dispose d'un ensemble de 5 entiers. Si on les ajoute deux à deux, on obtient les dix sommes suivantes :

2001, 2006, 2007, 2008, 2009, 2014, 2017, 2018, 2023, 2025.

Quels sont ces cinq nombres ?

Solution

Soit a, b, c, d et e ces cinq entiers, tels que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$.

On a nécessairement $a + b = 2001$, $a + c = 2006$, $d + e = 2025$ et $c + e = 2023$.

Par conséquent, $c = b + 5$, $d = c + 2 = b + 7$, et $b \geq a + 1$ ainsi que $e \geq d + 1$ (car 2001 et 2025 sont impairs, donc $b \neq a$ et $e \neq d$).

Ensuite, il faut déterminer le plus petit entre $a + d$ et $b + c$.

Supposons que $a + d = 2007$, on a alors $d = c + 1 = b + 6$, ce qui contredit le fait que $d = b + 7$.

Donc $b + c = 2007$, ce qui implique que $b = a + 1$ (car $a + c = 2006$).

Puisque $a + b = 2001$, on en déduit que $a = 1000$.

On a ainsi les entiers $a = 1000$, $b = a + 1 = 1001$, $c = a + 6 = 1006$ et $d = a + 8 = 1008$.

Enfin, puisque $d + e = 2025$, on en déduit que $e = 1017$.

Les 5 entiers sont donc 1000, 1001, 1006, 1008 et 1017. On vérifie alors sans peine que les sommes correspondent bien à celles indiquées dans l'énoncé.

Exercice n° 3 (série ES)

Enoncé

Trois nombres à comparer

Soient quatre réels a, b, c, d tels que $a < b < c < d$.

On pose $x = (a + b)(c + d)$, $y = (a + c)(b + d)$, $z = (a + d)(b + c)$.

Comparer les nombres x, y et z .

Solution

$$\begin{aligned} x - y &= ac + bc + ad + bd - ab - ad - cb - cd \\ &= a(c - b) + d(b - c) = (d - a)(b - c) < 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y - z &= ab + ad + cb + cd - ab - ac - db - dc \\ &= a(d - c) + b(c - d) = (a - b)(d - c) < 0 \end{aligned}$$

d'où $x < y < z$.

Exercice n° 4 (séries STL, STI)

Enoncé

Dans un parallélogramme

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les bissectrices des angles au sommet : A, B, C et D .

Déterminer la nature du quadrilatère dont les sommets sont les points d'intersection de ces bissectrices deux à deux.

Solution

Notons P, Q, R et S les points d'intersection des bissectrices.

On sait que dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux. Donc $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$.

Ensuite $\widehat{PAD} = \frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{BCR}$, et puisque les côtés (AD) et (BC) sont parallèles, on a $(PA) \parallel (CR)$

Et donc $(PQ) \parallel (SR)$.

De même $\widehat{PBC} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{D} = \widehat{RDA}$, donc $(PB) \parallel (RD)$, puis $(PS) \parallel (QR)$.

On en déduit donc que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

Mais ce n'est pas tout.

On a $\widehat{SPQ} = \widehat{APB} = 180 - \widehat{PAB} - \widehat{PBA} = 180 - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = 180 - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$.

Or $360 = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2(\widehat{A} + \widehat{B})$, donc $\widehat{SPQ} = 180 - 90 = 90^\circ$.

Par conséquent, le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est-à-dire un rectangle.

