

AIX–MARSEILLE

Exercice n° 1 (Série S)

Énoncé

Les classes de premières

Dans un lycée, les classes de premières sont numérotées ainsi : 1^{ère} 1, 1^{ère} 2 ... et ainsi de suite.

Pour n'importe quelle classe, sauf pour la dernière, si on ajoute deux fois le nombre d'élèves de cette classe au nombre d'élèves de la classe suivante, on trouve 64. (**Propriété P**).

Le nombre de classes de premières de ce lycée est le plus grand vérifiant la propriété P.

Quel est le nombre de classes de premières de ce lycée ?

Combien y a-t-il alors d'élèves en 1^{ère} 1 ?

Solution 1

Soit n un entier naturel. Notons P_n le nombre d'élèves dans la classe 1^{ère} n .

Déterminons de proche en proche P_n en fonction de P_1 et exprimons la condition $P_n > 0$.

Il vient :

- $2P_1 + P_2 = 64$ s'écrit $P_2 = 64 - 2P_1$. $P_2 > 0$ équivaut à $P_1 < 32$.
- $2P_2 + P_3 = 64$ s'écrit $P_3 = 64 - 2P_2 = 4P_1 - 64$. $P_3 > 0$ équivaut à $P_1 > 16$.
- $2P_3 + P_4 = 64$ s'écrit $P_4 = 64 - 2P_3 = 192 - 8P_1$. $P_4 > 0$ équivaut à $P_1 < 24$.
- $2P_4 + P_5 = 64$ s'écrit $P_5 = 64 - 2P_4 = 16P_1 - 320$. $P_5 > 0$ équivaut à $P_1 > 20$.
- $2P_5 + P_6 = 64$ s'écrit $P_6 = 64 - 2P_5 = 704 - 32P_1$. $P_6 > 0$ équivaut à $P_1 < 22$.

Des deux dernières inégalités, il vient : $P_1 = 21$.

Le plus grand nombre de classes vérifiant cette propriété est 6, et on a :

$P_1 = 21, P_2 = 22, P_3 = 20, P_4 = 24, P_5 = 16$ et $P_6 = 32$.

Solution 2 (avec Calculatrice – André Guillemot)

Remarquons d'abord que si la classe de 1^{ère} 1 a plus de 32 élèves, dans ce cas il n'y a qu'une classe de 1^{ère}.

Pour toute classe de 1^{ère} 1 de moins de 17 élèves, il ne peut y avoir que deux classes de 1^{ère} dans le lycée.

Pour les effectifs de la 1^{ère} 1 entre 17 et 32 utilisons le programme suivant :

N : nombre d'élèves de la 1^{ère} 1.

C : Nombre de classes de 1^{ère}.

D : Nombres d'élèves de la classe suivante.

```
PROGRAM:MAYOTTE
:For(N,17,32)
:0→C:N→D
:While D>0
:64-2D→D:C+1→C
:End
:Pause (N,C)
:End■
```

Examinons les différentes valeurs fournies par le programme.

(17	4)
(18	4)
(19	4)
(20	4)
(21	6)
(22	5)
(23	5)

(24	3)
(25	3)
(26	3)
(27	3)
(28	3)
(29	3)
(30	3)

On peut donc conclure que le lycée a 6 classes de premières et la 1^{re} 1 a 21 élèves (un rêve)

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Oasis Oasis !

Deux touaregs partis d'un village A avancent avec leurs chameaux sur une route longue de 100 kilomètres menant à un village B. Au kilomètre 60, un des touaregs fait remarquer que les distances en kilomètres entre le village A et chacune des trois oasis qu'ils ont rencontrées, sont des nombres entiers et qu'en les multipliant on obtient un multiple de 1309. Quelques minutes après, le deuxième touareg fait remarquer que le produit des distances entre les trois

oasis et le village B est aussi un multiple de 1309.

Quelles sont les distances entre le village A et chacune des oasis ?

Solution

Notons x, y et z les distances entre le village A et les trois oasis. Le produit xyz doit être divisible par $1309 = 7 \times 11 \times 17$, ce qui fait qu'un des trois nombres x, y, z doit être divisible par 7, un des trois nombres x, y, z doit être divisible par 11 et un des trois nombres x, y, z doit être divisible par 17. D'après l'énoncé, chacun des nombres x, y, z est au plus égal à 60, ce qui entraîne que aucun des nombres x, y, z ne peut être divisible par deux des trois nombres premiers 7, 11 et 17.

On peut donc écrire, sans perte de généralité, $x = 7x_1, y = 11y_1$ et $z = 17z_1$ et de plus, on a : $1 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq y_1 \leq 5$ et $1 \leq z_1 \leq 3$.

Le produit des nombres $x' = 100 - x, y' = 100 - y$ et $z' = 100 - z$, tous positifs et inférieurs à 100, est aussi divisible par $1309 = 7 \times 11 \times 17$. On peut avoir alors deux situations :

Situation 1 : Un des trois nombres x', y' et z' est divisible par 7, un autre des trois nombres est divisible par 11 et encore un autre des trois nombres x', y' et z' est divisible par 17.

Situation 2 : Un des nombres, notons le u , est divisible par $7 \times 11 = 77$ et un deuxième des trois nombres, x', y' et z' est divisible par 17. Nécessairement, $u = 77$.

Mais alors $100 - u = 23$ est un des trois nombres x, y, z et comme il n'est divisible par aucun des nombres 7, 11 et 17, cela est impossible.

On est donc dans la situation 1.

Ainsi $y' = 100 - y$ doit être divisible par un des nombres 7, 11 et 17 et la seule possibilité est alors $y_1 = 4$ d'où $y = 44$ et $y' = 56$.

Le nombre $z' = 100 - z$ doit être divisible par un des nombres 7, 11 et 17 et la seule possibilité est $z_1 = 2$ ($z_1 = 3$ ne convient pas car on aurait $z' = 49$ et alors x' devrait être divisible par $11 \times 17 = 187$, ce qui est impossible). On obtient donc $z = 34$ et $z' = 66$.

Il est maintenant facile de voir que $x' = 100 - 7x_1$ doit être divisible par 17, et la seule possibilité est $x_1 = 7$ et donc $x = 49$.

Après vérification, on conclut que les trois distances sont 34 km, 44 km et 49 km.

Exercice n° 3 (Séries ES, L et Technologiques)

Énoncé

Le coffre fort

On veut ouvrir un coffre fort dont le code est un nombre à trois chiffres.

Voici les tentatives de quelqu'un qui ne connaît pas le code :

4 0 8 : aucun chiffre n'est correct (ni bien, ni mal placé),

3 6 9 : un seul chiffre est correct et ce chiffre est bien placé,

9 8 0 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé,

6 3 7 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé,

2 3 5 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé.

Répondre par Vrai ou Faux aux quatre affirmations suivantes et justifier les réponses en détaillant avec précision les étapes du raisonnement.

1. Le chiffre des unités du code est 9.
2. Seulement trois codes restent possibles à l'issue de ces tentatives.
3. Le code n'est pas un multiple de 3.
4. Le code est déterminé si l'on sait qu'il s'agit du carré d'un entier.

Solution

Information n° 1 : 4 0 8 : aucun chiffre n'est correct (ni bien, ni mal placé),

Information n° 2 : 3 6 9 : un seul chiffre est correct et ce chiffre est bien placé,

Information n° 3 : 9 8 0 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé,

Information n° 4 : 6 3 7 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé,

Information n° 5 : 2 3 5 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé.

1. VRAI

L'information n° 1 dit que les chiffres 0, 4 et 8 ne composent pas le code.

L'information n° 3 permet de savoir que 9 est un chiffre du code, mais mal placé.

L'information n° 2 permet de savoir que le code se termine par 9 et que 3 et 6 ne composent pas le code.

2. VRAI

L'information n° 4 permet de savoir que 7 est un chiffre du code, mais mal placé.

L'information n° 5 permet de savoir que soit 2 soit 5 est un chiffre du code, mais mal placé.

Le 9 est en troisième position, et le 7 est soit en première soit en deuxième position.

Si le 7 est en deuxième position, seul le 5 peut être en première position

puisque le 2 est mal placé. Le code 579 est un code possible.

Si le 7 est en première position, le 2 comme le 5 peuvent être en deuxième position. Les codes 729 et 759 sont donc possibles.

Seuls trois codes restent possibles.

3. FAUX

Tous les trois codes possibles sont multiples de 3.

4. VRAI

Parmi les trois codes restants, seul $729 = 27^2$ est le carré d'un entier.

Exercice n° 4 (Séries ES, L et Technologiques)

Enoncé

Triangles numériques

On considère le triangle de nombres ainsi formé :

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
16	...	...	...	...	...

Les entiers naturels non nuls y sont successivement écrits, le premier en première ligne, les deux suivants en deuxième ligne, les trois suivants en troisième ligne ... et ainsi de suite. Ainsi, par exemple, le nombre 8 se situe à la 4^{ème} ligne, au 2^{ème} rang.

1. À quelle ligne le nombre 53 se situe-t-il et quel est le rang de ce nombre sur cette ligne ?
2. À quelle ligne le nombre 2007 se situe-t-il et quel est le rang de ce nombre sur cette ligne ?
3. On se donne un entier naturel k non nul.
On considère le nombre situé à la $k^{\text{ième}}$ ligne, au $k^{\text{ième}}$ rang, ainsi que le nombre situé à la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne, au $(k+1)^{\text{ième}}$ rang.

Démontrer que la somme de ces deux nombres est le carré d'un entier naturel.

Formulaire :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemples : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$; $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \times 7}{2} = 21$

Solution

1. On constate que le nombre situé à la $k^{\text{ième}}$ ligne, au $k^{\text{ième}}$ rang n'est autre que la somme des k premiers nombres.

$$53 = 45 + 8 = \frac{9 \times 10}{2} + 8 = (1 + 2 + \dots + 9) + 8.$$

53 est situé sur la $10^{\text{ème}}$ ligne, au $8^{\text{ème}}$ rang.

2. $2007 = 1953 + 54 = \frac{62 \times 63}{2} = 54 = (1 + 2 + \dots + 62) + 54.$

2007 est situé sur la $63^{\text{ème}}$ ligne, au $54^{\text{ème}}$ rang.

3. Il s'agit de considérer la somme :

$$S = (1 + 2 + \dots + k) + (1 + 2 + \dots + (k + 1)) = \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2},$$

$$S = \frac{k + 1}{2} [k + (k + 2)] = \frac{k + 1}{2} (2k + 2) = (k + 1)(k + 1) = (k + 1)^2.$$

La somme du nombre situé sur la $k^{\text{ième}}$ ligne, au $k^{\text{ième}}$ rang, et du nombre situé à la $(k + 1)^{\text{ième}}$ ligne, au $(k + 1)^{\text{ième}}$ rang est le carré d'un entier naturel.