

TOULOUSE

Exercice n° 1

Énoncé

L'incorruptible est-il honnête

(candidats toutes séries)

Dans un certain état a eu lieu un scrutin parlementaire d'une grande importance. Alors que le parti P_1 l'a emporté d'une voix sur le parti P_2 , certains journalistes écrivent que Monsieur I, surnommé « l'incorruptible », membre du parti P_2 , a voté P_1 , après que le parti P_1 lui a offert une confortable somme d'argent.

Une enquête est ouverte. On interroge quatre parlementaires du parti P_1 , en posant deux questions à chacun, et l'on sait que chacun des quatre a dit une fois la vérité et menti une fois. Voici les quatre dépositions :

- M.A : aucun de nous quatre n'est le trésorier des fonds secrets du parti. M.I a reçu l'argent de M.B qui le tenait de M.D ;
- M.B : l'argent a été reçu par M.I. M.C est le trésorier des fonds secrets ;
- M.C : la deuxième réponse de M.A est vraie. La deuxième réponse de M.B est vraie ;
- M.D : M.I n'a pas reçu d'argent de notre parti. Je le sais puisque je suis le trésorier des fonds secrets.

Questions : M.I a-t-il été corrompu par le parti P_1 , et dans ce cas, qui lui a remis l'argent ? L'un des quatre parlementaires qui ont déposé est-il le trésorier des fonds secrets du parti P_1 , et si oui, lequel ?

Solution

Supposons que M. C est le trésorier. Alors :

(M. B) première réponse fausse et deuxième vraie : M. I n'a pas été corrompu

(M. A) deuxième réponse fausse, donc première vraie : M. C n'est pas le trésorier.

Donc, par l'absurde, M.C n'est pas le trésorier.

Par conséquent (M. B) l'argent a bien été reçu par M. I, et, la deuxième réponse de M. B étant fausse, la deuxième réponse de M. C également. On en déduit que la première est vraie, c'est-à-dire que la deuxième réponse de M. A est vraie, donc M. I a reçu l'argent de M. B. La première réponse de M. D est fausse, donc la seconde est vraie : c'est bien lui qui est le trésorier des fonds secrets du parti P_1 .

Exercice n° 2

Enoncé

Non, ce n'est pas du hasard

(candidats des séries autres que S et STI)

Deux personnes jouent à un jeu de nombres. Elles se donnent la liste de nombres suivante :

1, 3, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 40, 46, 54, 60, 65, 71, 80, 82, 100

Le premier joueur choisit un nombre entier compris entre 1 et 7 inclus.

Le second joueur ajoute un nombre compris entre 1 et 7 inclus de manière à obtenir un nombre de la liste.

Puis, c'est à son adversaire de faire de même, et ainsi de suite. Celui qui ne peut pas obtenir un nombre de la liste a perdu.

1. Quel est le plus petit nombre de la liste qui, annoncé par l'un des joueurs, empêche l'autre de lui répondre ?
2. Y a-t-il une stratégie gagnante à coup sûr pour l'un des joueurs ? Lequel ? Expliquer cette stratégie.

Solution

a) 46 évidemment puisque $54-46=8>7$!

b) A partir de 14, le second nombre en suivant dans la liste est toujours à une distance >7 , ceci jusqu'à 46 : le joueur suivant est toujours obligé d'annoncer le nombre immédiatement suivant de la liste. Le joueur qui annoncera le « nombre gagnant » 46 est donc, en remontant la liste, celui qui aura annoncé 14. Le premier joueur est alors certain de gagner en choisissant initialement un nombre compris entre 3 et 6, car le second ne pourra répondre que par 7 ou 10, et dans les deux cas le premier joueur a la possibilité d'annoncer 14, et par suite de gagner !

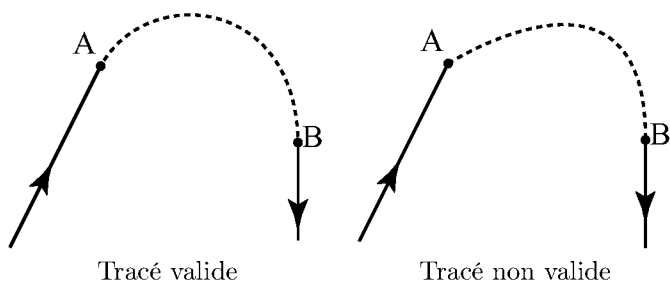
Exercice n° 3

Enoncé

Virages

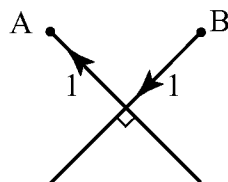
(candidats des séries S et STI)

L'objectif est de raccorder des portions de route rectilignes à sens unique par des virages en arcs de cercle ; bien sûr, pour être roulable, le trajet obtenu doit être « lissé », c'est-à-dire sans point anguleux !



Les nombres indiqués sur certains des tracés proposés représentent des distances en centaines de mètres. Dans tous les tracés, on devra relier le point A au point B à l'aide d'arcs de cercle et uniquement d'arcs de cercle.

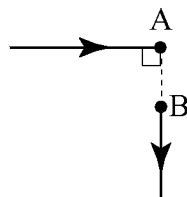
Exemple : le tracé T_1



1. On essaie de tracer un virage joignant A à B à l'aide d'un seul arc de cercle.

- Décrire et représenter une solution convenable pour relier A à B dans T_1 et calculer la longueur du virage.
-

Existe-t-il un virage à un seul arc pour le tracé T_2 ci-contre ?
(Justifier la réponse)

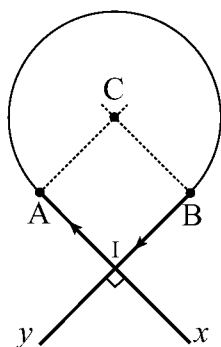


2. On utilise maintenant, si l'on veut, deux arcs de cercle contigus ; mais bien sûr, le tracé doit toujours être « lissé » !

ACBI est un rectangle à deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un carré. Le rayon de l'arc est donc IA qui est connu. Enfin l'arc est situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas les demi-droites.

Synthèse : on trace les perpendiculaires Δ_A en A à $[Ax)$ et Δ_B en B à $[By)$. Elles se coupent en C puisque parallèles à $[By)$ et $[Ax)$. L'intersection du cercle de centre C, passant par A et du demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas les demi-droites $[Ax)$ et $[By)$ fournit le virage demandé.

La longueur du virage est alors $\frac{3}{4} \times 2\pi \times 1 = \frac{3\pi}{2}$



(b) Si un tel virage existait, le centre du cercle support serait à la fois sur la perpendiculaire en A à $[Ax)$, c'est-à-dire sur (AB) et sur la perpendiculaire en B à $[By)$, donc ce serait B ; comme ce cercle passe par B, il serait de rayon nul et comme il passe par A, on aurait $A = B$ ce qui n'est pas.

2. Une vraie difficulté est à nouveau de traduire les contraintes de tracé. Le contact entre les arcs impose une tangente commune et l'alignement des centres sur la normale au point de contact, mais un contact intérieur n'est pas a priori exclu. L'intérêt d'imposer des rayons de même longueur est le fait que le contact intérieur est alors exclu, ce qui permet d'apporter des précisions sur le positionnement du point I. Encore une fois, on peut se contenter de prendre les informations sur une figure. Procédons à nouveau par analyse-synthèse.

Analyse : supposons le problème résolu ; soient C_A (resp. C_B) le centre du cercle support du virage partant de A (resp. B) ; puisque les deux cercles sont tangents et qu'ils ont même rayon, ils le sont extérieurement (sinon ils seraient confondus et on aurait une solution à un seul virage). Le point I est alors nécessairement dans la bande (ouverte) perpendiculaire au segment $[A ; B]$. (sinon le point B serait à l'intérieur du cercle de centre C_A).

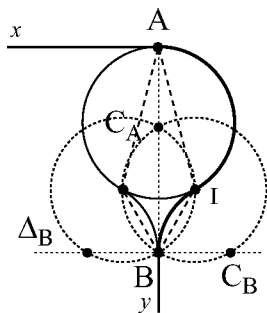
Le point de contact I est donc le milieu de $[C_A C_B]$ et le triangle $BC_A C_B$ est ainsi un demi-triangle équilatéral, et donc le triangle $BC_B I$ est équilatéral ; on en déduit que $\widehat{yBI} = \frac{5\pi}{6}$, ce qui fournit un premier lieu pour I.

Par ailleurs, l'angle inscrit $\widehat{C_AAI} = \frac{1}{2}\widehat{BC_AI} = \frac{\pi}{12}$, ce qui fournit un deuxième lieu pour le point I.

Il est aussi possible de passer par le calcul du rayon R des cercles : on a, en effet, en projetant sur (AB) :

$$R + 2R\frac{\sqrt{3}}{2} = AB \text{ et donc } R = \frac{AB}{1 + \sqrt{3}}.$$

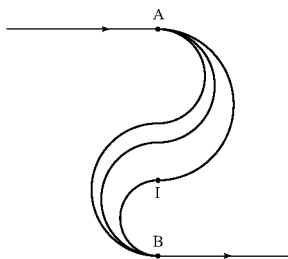
Synthèse : on trace les deux demi-droites d'origine A (resp. B) faisant avec $[AB]$ (resp $[BA]$) un angle de $\frac{\pi}{12}$ (resp $\frac{\pi}{6}$) ; leurs intersections fournissent I (deux points) ; le cercle de centre I et passant par B coupe $[AB]$ en C_A (un seul point) et Δ_B en C_B (deux points). Le cercle de centre C_A passant par A et le cercle de centre C_B passant par B passent par I puisque d'une part BIC_B est équilatéral (isocèle avec un angle $\frac{\pi}{3}$) et d'autre part AC_AI est isocèle ($\widehat{C_AIA} = \widehat{BC_AI} - \widehat{C_AAI} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$).



De plus, ils sont bien tangents en J puisque I est centre du cercle circonscrit au triangle rectangle C_ABC_B . Avec ces cercles comme support, on obtient 4 doubles virages candidats, dont un seul convient.

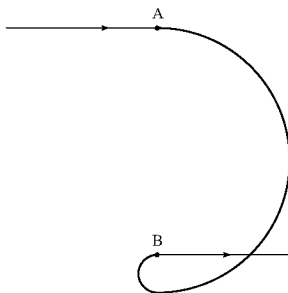
3. (a) La réponse est non car les deux demi-droites ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (AB) .

(b) Construire des solutions à deux arcs contigus est simple ; il suffit de choisir un point $I \in [AB]$ et de construire le demi-cercle de diamètre $[AI]$ (resp. $[IB]$) situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas $[Ax]$ (resp. $[By]$).



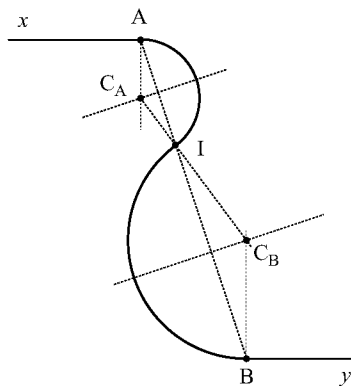
Le demi-périmètre d'un cercle étant proportionnel à son diamètre, et la somme des diamètres des différentes solutions étant constante égale à AB , la longueur des virages est constante, égales à $\frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$ hectomètres.

Notons qu'on peut envisager d'autres solutions, dont la longueur n'est plus la même :



Raccordement double : cas parallèle

L'analyse est simple, il suffit de contempler.

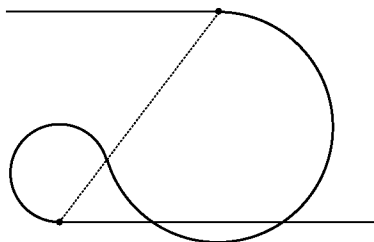


Synthèse : on prend I sur $[AB]$; la médiatrice de $[AI]$ et la perpendiculaire en A à $[Ax]$ se coupent en C_A . On définit de même C_B . Les cercles de centre C_A passant par A et de centre C_B passant par B sont tangents en I . Pour le

prouver, il suffit de considérer l'homothétie de centre I qui transforme A en B . Elle transforme C_A en C_B par conservations diverses donc le cercle de centre C_A en celui de centre C_B . Avec ces cercles comme support, on obtient un tracé en choisissant les arcs dans les bons demi-plans de frontière (AB) .

En choisissant l'au milieu de $[AB]$, on aura un tracé à rayons égaux. Le point remarquable est la constance de la longueur du virage double, qui découle de l'invariance de la direction de $(C_A C_B)$ lorsque I décrit $[AB]$, qui elle-même découle du fait que la distance entre les deux médiatrices est constante. On peut le voir aussi en projetant orthogonalement $[AB]$ sur (Ax) et sur la direction orthogonale.

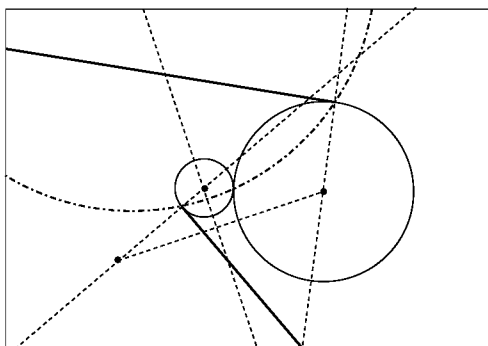
Le tracé obtenu (qui satisfait les conditions de lissité) peut être rejeté dans certains cas pour cause d'intersection avec les demi-droites $[Ax]$ ou $[By]$. Sous la contrainte supplémentaire des rayons égaux, il est facile de montrer que le problème n'aura pas de solution si le projeté orthogonal de A sur la demi-droite $[By]$ est à une distance de B supérieure à $\frac{AB}{\sqrt{2}}$ (longueur du côté du carré de diagonale AB). Dans le cas sans solution à rayons égaux, il n'y en n'aura pas non plus à rayons inégaux puisque dans ce cas, un des rayons sera plus grand que dans le cas d'égalité des rayons.



Pour le fun : cas général des virages à deux arcs

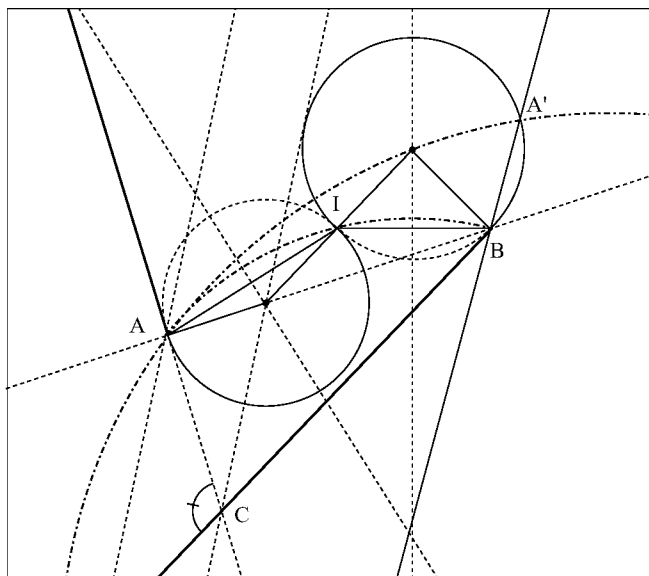
On prend les demi-droites en « position générale », c'est-à-dire à support sécants en C . On pose $([Ax]; [By]) = \alpha$.

Il est assez facile de construire une solution à deux arcs. On trace un cercle C_A tangent en A à $[Ax]$ et ne passant pas par B ; il reste alors à construire un cercle tangent en B à $[By]$ et tangent au cercle C_A . La chose est classique (2 solutions, une avec contact extérieur l'autre avec contact intérieur si le point B est extérieur à C_A , deux avec contacts intérieurs sinon).



Cabri permet de conjecturer un lieu pour le point de contact I : un arc capable construit sur $[A; B]$. Un examen des triangles isocèles $AC_A I$ et $IC_B B$ et l'introduction de A' intersection de (AI) et de C_B permet d'obtenir l'info : $\frac{\pi + \alpha}{2}$. On sait construire un tel arc. Un choix arbitraire de I permet alors d'achever autrement la construction d'un virage double. Merci, Cabri.

Du coup, on peut construire un virage à deux arcs de même rayon. L'idée est de construire A' symétrique de A par rapport à I par la méthode des deux lieux. A' est l'image de I par l'homothétie de centre et de rapport 2 (premier lieu), et par ailleurs (BA') est parallèle à l'une des bissectrices de ABC issue de C (toujours le triangle isocèle $IC_B B$ et un angle au centre). C'est le deuxième lieu.



Palmarès

STI : JUNG Nicolas - Lycée Alexis Monteil - Rodez

ES : CUCU Aurélie - Lycée Villefranche de Rouergue

SMS : HART Friedrich - Lycée St Gabriel - Saint Afrique

STG : LAFFERRIERE Betty - Lycée Jacques Bossuet - Condom.

S :

Premier prix : COMBES Pascal - Lycée La Borde Basse - Castres

Deuxième prix : BROUSSARIE Renaud - Lycée Pierre Paul Riquet - St Orens

Troisième prix : FABRE benoît - Lycée privé Barral - Castres

Quatrième prix : HOA Karlotcha - Lycée privé Jeanne d'Arc - Figeac.