

STRASBOURG

Exercice n° 1

Enoncé

Les cartes (Toutes les séries)

Pour les besoins d'un jeu, un imprimeur fait imprimer des cartes. Sur chaque carte figure un nombre entier compris entre 100 et 999. Le 1 est imprimé « I ». Il remarque que certaines cartes permettent de lire deux entiers selon qu'on les oriente dans un sens ou dans l'autre. Par exemple, I09 se lira 60I en retournant la carte. Dans un tel cas, par mesure d'économie, il n'imprime qu'une carte au lieu de deux.

Combien de cartes doit-il imprimer en tout pour que tous les entiers compris entre 100 et 999 soient ainsi représentés ?

Solution

Sans l'« économie » il faudrait imprimer 900 cartes, il reste à voir combien de cartes sont « à double lecture ». Les chiffres à étudier particulièrement sont le 0 (attention à ceux qui se terminent par un 0), le 1 et le 8 qui sont invariants par le « retournement » et le 6 et 9 qui sont « symétriques ».

Pour chaque centaine commençant par 6 ou 9, il y a 20 cartes à double lecture : en effet, il y a 5 choix pour le deuxième chiffre et 4 pour le troisième (puisqu'il faut enlever celles dont le chiffre se termine par 0). Pour chaque centaine commençant par 1 ou 8 il y en a 17 puisque 101, 111, 181 et 808, 888, 818 se lisent de la même façon quand on les retourne. Cela fait $20 + 20 + 17 + 17 = 74$ cartes « à double lecture » ; ainsi seule la moitié sera imprimée.

Le jeu comprendra donc $900 - 37 = 836$ cartes.

Exercice n° 2

Enoncé

Naturels... (Séries S et STI)

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{9n-16}{n^2+4}$ soit un entier naturel.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{n^3-5n+16}{n^2+4}$ soit un entier naturel.

Solution

1. $\frac{9n-16}{n^2+4} \geq 1$ donne $(n-4)(n-5) \leq 0$, soit $n = 4$ ou $n = 5$.

Le cas $\frac{9n-16}{n^2+4} = 0$ est à exclure.

2. Ecrire $n^3 - 5n + 16 = n(n^2 + 4) + 16 - 9n$ et utiliser les résultats du 1.

Exercice n° 3

Enoncé

Naturels... (Séries ES et GMF)

1. Existe-t-il des entiers naturels n tels que $\frac{9n-16}{n^2+4}$ soit égal à 0, 1 ou 2 ?
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{9n-16}{n^2+4}$ soit un entier naturel.

Solution

1. $\frac{9n-16}{n^2+4} = 0$ entraîne $n = \frac{16}{9} \notin \mathbf{N}$
 $\frac{9n-16}{n^2+4} = 1$ entraîne $n = 4$ ou $n = 5$.
 $\frac{9n-16}{n^2+4} = 2$ entraîne $n^2 - 9n + 24 = 0$ donc $\Delta < 0 \dots$
2. $\frac{9n-16}{n^2+4} \geq 1$ donne $(n-4)(n-5) \leq 0$, soit $n = 4$ ou $n = 5$.
 Le cas $\frac{9n-16}{n^2+4} = 0$ est à exclure.

Palmarès

Les élèves suivants ont été primés : AMARELLY Antoine, BOSSY Camille, DEMIR Iker, LIENHARD Arnaud, LOPEZ Carlos, RAO Michel...