

ROUEN

Exercice n° 1

Enoncé

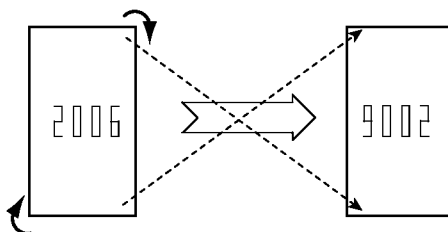
Les nombres pivotables

(Toutes séries)

Les nombres entiers naturels sont formés à partir des dix chiffres suivants obtenus par combinaison de sept segments, conformément à l’affichage digital usuel :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

On écrit un nombre entier, noté a , sur une feuille. On fait pivoter la feuille de telle sorte que le haut et le bas de la feuille s’échangent, comme l’illustre le schéma suivant



Si sur la feuille ainsi pivotée on peut lire de nouveau un nombre entier noté b , alors le nombre a écrit initialement sur la feuille est dit « pivotable », et le nombre b est dit « pivoté » de a .

Par exemple :

90	est pivotable et son pivoté est	06	
57	n'est pas pivotable car	75	n'est pas l'écriture d'un entier.
2006	est pivotable et son pivoté est	9002	

Quel est le 2006^{ème} nombre entier pivotable ?

Solution

Il y a sept chiffres pivotables $\overline{0125689}$ dont les pivotés sont $\overline{0125986}$.

Entre 0 et 9999, il y a donc $7^4 = 2401$ nombres pivotables.

Entre 9000 et 9999, il y a $7^3 = 343$ nombres pivotables (comme entre 0 et 999).

Entre 8900 et 8999, il y a $7^2 = 49$ nombres pivotables (comme entre 0 et 99).

Ainsi 8899 est le 2009^{ème} nombre pivotable ($2401 - 343 - 49 = 2009$).

Le 2008^{ème} est 8898.

Le 2007^{ème} est 8896.

Le 2006^{ème} est 8895 de pivoté 5688.

Exercice n° 2

Enoncé

Une fonction

(Séries L, ES, STG)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n}}.$$

1. Calculer $f_2(2)$, $f_3(2)$, $f_4(3)$. On cherchera à donner le résultat sous la forme d'une puissance d'un nombre entier le plus petit possible.
2. Donner la valeur exacte de $f_{2005}(2006)$.

Solution

1. On obtient :

$$f_2(2) = \frac{2 + 2^2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}} = 8 = 2^3;$$

$$f_3(2) = \frac{2 + 2^2 + 2^3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}} = \frac{14}{\frac{7}{8}} = 16 = 2^4;$$

$$f_4(3) = \frac{3 + 3^2 + 3^3 + 3^4}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}} = \frac{120}{\frac{40}{81}} = 243 = 3^5.$$

2. L'expression de $f_n(x)$ peut se simplifier. En effet :

$$\frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n}} = \frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{\frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1}{x^n}} = \frac{x^n(x + x^2 + \cdots + x^n)}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} = x^{n+1}$$

en factorisant la parenthèse du numérateur par x . On peut aussi raisonner de la manière suivante :

- Si $x \neq 1$. En remarquant que le numérateur est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x et de premier terme x , et le dénominateur est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de

$$\text{raison } \frac{1}{x} \text{ et de premier terme } \frac{1}{x}, \text{ on obtient : } f_n(x) = \frac{\frac{1-x^n}{1-x} \times x}{\frac{1-\frac{1}{x^n}}{1-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x}} = x^{n+1},$$

après simplification.

- Si $x = 1$. $f_n(1) = 1$ quel que soit n , par un calcul direct à partir de la formule initiale.

Par conséquent $f_{2005}(2006) = 2006^{2006}$.

Exercice n° 3

Enoncé

Construction

(Séries S, STI)

L'unité de longueur est le décimètre.

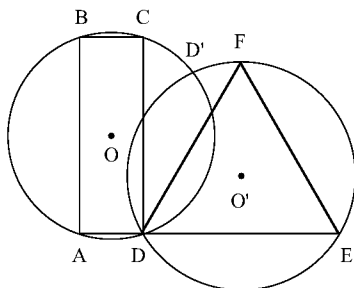
On construit un rectangle $ABCD$ et un triangle équilatéral DEF tels que :

- A et E sont fixes avec $AE = 1$,
- D est un point mobile du segment $[AE]$,
- le périmètre du rectangle $ABCD$ est 2.

(Les points B , C et F sont situés dans le même demi-plan, délimité par la droite (AE) , comme sur la figure ci-dessous). On introduit :

- $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$, de centre noté O ,
- $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle DEF , de centre noté O' .

Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en D et en un autre point D' , (supposé distinct de D dans la suite).



On pose $x = DE$. La figure a été construite avec $x = 0,75$.

- 1- Construire une figure avec $x = 0,6$.
- 2- Pour quelle(s) position(s) du point D le rectangle $ABCD$ et le triangle DEF ont-ils la même aire ?
- 3- Pour quelle valeur de x le quadrilatère $ODO'D'$ est-il un losange ?
- 4- Montrer que, pour la valeur de x trouvée à la question 3, le losange $ODO'D'$ est un carré.

Solution

1. Cette question a pour but de se familiariser avec le sujet et ne présente pas de difficultés.

2. Il faut déterminer $AD = 1 - x$ et $AB = 1 - AD = 1 - 1 + x = x$. L'aire de $ABCD$ est donc $x(1 - x)$. On détermine la hauteur de DEF . On a $h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ et aire de $DEF = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. On résout l'équation $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x(1 - x)$ soit $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 1\right)x^2 - x = 0$ d'où $x = \frac{4}{\sqrt{3} + 4}$ ou $x = 0$, qui est à rejeter car D est alors égal à D' .

3. $ODO'D'$ est un losange si et seulement si les rayons des cercles sont égaux. Le rayon de $\mathcal{C}$ est la demi-diagonale du rectangle de mesures $1 - x$ et x donc $R^2 = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)$.

Détermination du rayon de $\mathcal{C}'$: les hauteurs d'un triangle équilatéral sont aussi médianes. Le centre du cercle circonscrit est aussi centre de gravité et donc $R' = \frac{2}{3}h = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

$R = R'$ si et seulement si $\frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1) = \frac{x^2}{3}$ si et seulement si $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$. Or $x \in [0; 1]$ donc la solution est $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

4. La mesure de l'angle $\widehat{O'DF}$ est 30° car $(O'D)$ est la bissectrice de $\widehat{FDE}$. Il en est donc de même de l'angle $\widehat{CDF}$ car $ABCD$ rectangle. De plus, dans le triangle BCD , $\tan a = \frac{1 - x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ où a est l'angle $\widehat{BCD}$. Donc $a = 30^\circ$, et $ODO'D'$ est un losange dont un angle est droit (car $\widehat{ODO'} = a + 30 + 30$) : c'est un carré.