

RENNES

Exercice n° 1

Enoncé

Les boules dans la boîte

(Séries S et STI)

A- On dispose de deux boules de rayon r que l'on veut placer dans la plus petite boîte possible de section orthogonale carrée et de hauteur $2r$. On admettra que dans ces conditions les deux boules sont en contact et qu'elles sont chacune en contact avec deux côtés latéraux contigus de la boîte.

1. Déterminer en fonction de r les dimensions de la boîte.
2. Dans le cas où $r = 2$, réaliser une construction à la règle et au compas du côté de la boîte.

B- On dispose de trois boules de rayon r qu'on veut placer dans la plus petite boîte possible de section orthogonale triangulaire équilatérale et de hauteur $2r$. On admettra que dans ces conditions les trois boules sont en contact deux à deux et qu'elles sont chacune en contact avec deux côtés latéraux contigus de la boîte.

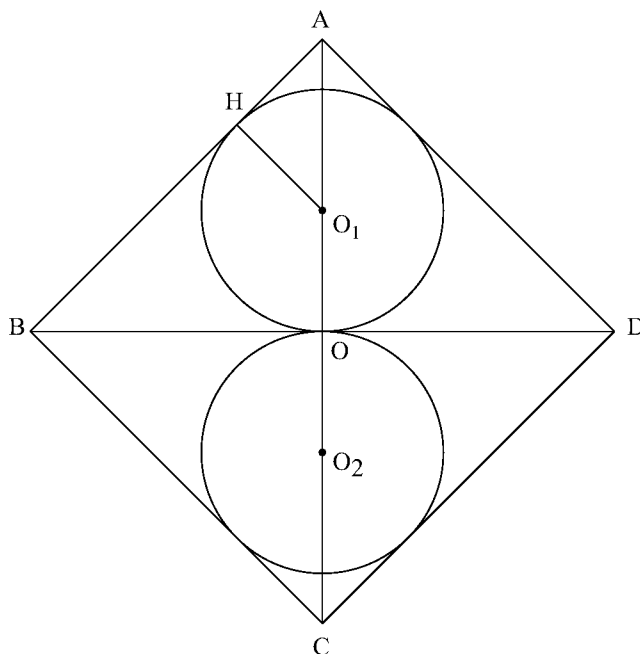
1. Déterminer la longueur du côté de cette boîte.
2. Dans le cas où $r = 2$, exprimer la longueur du côté sous une forme exacte non trigonométrique ne contenant que des racines carrées puis sous une forme approchée à 10^{-2} près.
On rappelle la formule : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
3. À partir d'un triangle équilatéral dont le côté a pour valeur approchée en centimètres celle trouvée dans la question précédente, réaliser une construction vue de dessus à la règle et au compas de la boîte et des trois boules qu'elle contient.

On fera figurer les traits de construction sur la figure.

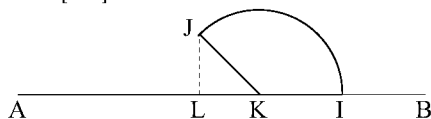
Solution

A-²

1) Les diagonales du carré se coupant en leur milieu, on a $AO = OB$. On a d'autre part $HO_1 = AH$ et donc, à l'aide du triangle AHO_1 rectangle isocèle en H, $AO_1 = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r^2 = r\sqrt{2}$. On a alors $AO = r(\sqrt{2} + 1)$ et donc dans le triangle AOB rectangle isocèle en O, $AB = \sqrt{r^2(\sqrt{2} + 1)^2 + r^2(\sqrt{2} + 1)^2} = r(\sqrt{2} + 1)\sqrt{2} = r(2 + \sqrt{2})$.



2) Si $r = 2$, on a $AB = 2((\sqrt{2} + 1)\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}$. On construit $[AK]$ de longueur 4. En L appartenant à $[AK]$ on construit $[LJ]$ perpendiculaire à $[AK]$ et tel que $LJ = 1$. On a alors $KJ = \sqrt{2}$. On construit alors $[KI]$ puis $[IB]$ de longueur égale à celle de $[KJ]$.



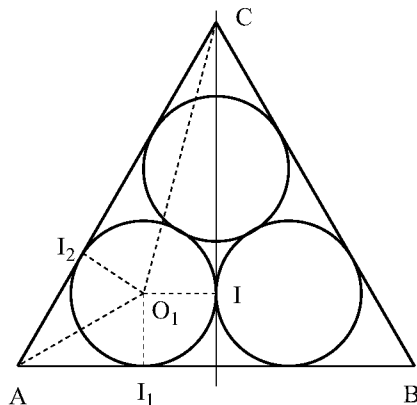
B-

1) On considère le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O_1 , il est tangent en I à la médiane-médiatrice-bissectrice-hauteur en C. L'angle $\widehat{ACI}$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$. $\mathcal{C}_1$ est aussi tangent en I_1 à $[AB]$ et en I_2 à $[AC]$. Le rayon aboutissant au point de

²N.D.L.R. Cf. aussi Nice - Exercice 3.

tangente étant perpendiculaire à la tangente au cercle en ce point, le point O_1 est équidistant (distance r) des côtés $[CA]$ et $[CI]$, $[CO_1]$ est donc bissectrice, d'où l'angle $\widehat{ACI_1}$ a pour mesure $\frac{\pi}{12}$. Par un raisonnement du même type, on montre que $[AO_1]$ est bissectrice de $\widehat{CAB}$.

Si on considère le triangle O_1I_2C rectangle en I_2 , on a $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{I_2O_1}{CI_2} = \frac{r}{CI_2}$ d'où $CI_2 = \frac{r}{\tan \frac{\pi}{12}}$. De la même manière si on considère le triangle AO_1I_2 rectangle en A , on a $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{I_2O_1}{AI_2} = \frac{r}{AI_2}$ d'où $AI_2 = \frac{r}{\tan \frac{\pi}{6}}$. On en conclut que le côté du triangle a pour mesure $CI_2 + AI_2 = \frac{r}{\tan \frac{\pi}{12}} + \frac{r}{\tan \frac{\pi}{6}}$.



2) On a

$$AB = BC = CA = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{12}} + \frac{2}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}} + \frac{2}{\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}}}$$

$$= 2 \left[\frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} \right]$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \text{ donc } \cos \frac{\pi}{6} = 2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$$

$$\text{d'où } \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 \text{ donc } \sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$$

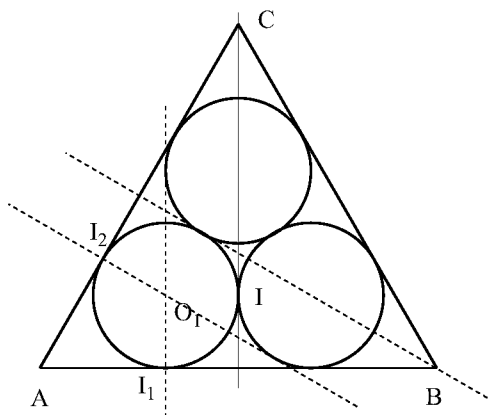
$$\text{d'où } \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Comme on a $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, le sinus est positif et donc $\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$.

Finalement les trois côtés de la boîte ont chacun pour mesure

$$2 \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \right] = 2 \left[\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} + \sqrt{3} \right] = 4(1 + \sqrt{3}).$$

3 Conctruction)



Exercice n° 2

Enoncé

Gogoland

(Séries S et STI)

Dans le Gogoland, les mathématiciens ne disposent pas des mêmes opérations que nous, l'opération de base s'écrit Δ . Pour deux nombres a et b ($b \neq 0$), le calcul $a\Delta b$ au Gogoland correspond chez nous au calcul $1 - \frac{a}{b}$. On écrira donc que $a\Delta b = 1 - \frac{a}{b}$ en notant bien que l'opération indiquée à droite du signe $=$ n'est pas lisible au Gogoland.

1. Résoudre dans notre système les équations $a\Delta b = 0$ et $a\Delta b = 1$.
2. Quels sont nos résultats produits par les calculs gogolandais suivants : $a\Delta 1$ et $1\Delta b$?

3. L'opération Δ est-elle commutative, c'est-à-dire : a-t-on pour tous nombres a et b non nuls $a\Delta b = b\Delta a$?
4. Quels résultats produisent pour nous $(a\Delta b)\Delta a$ puis $a\Delta(b\Delta a)$ pour a et b non nuls et différents.
5. En simplifiant dans notre système l'expression $1 - (1 - \frac{a}{b})$ déduire le calcul gogolandais qui produit notre quotient $\frac{a}{b}$. Préciser alors quel calcul donne l'expression $\frac{1}{b}$.
6. En conclusion montrer que les gogolandais ont à leur disposition toutes nos opérations.

Solution

1) Résolution d'équations :

$a \Delta b = 0$ signifie pour nous $1 - \frac{a}{b} = 0$ donc $\frac{a}{b} = 1$ d'où $b = a$. Finalement on a $a\Delta a = 0$.

$a \Delta b = 1$ signifie pour nous $1 - \frac{a}{b} = 1$ donc $\frac{a}{b} = 0$ d'où $a = 0$. Finalement on a $0\Delta b = 1$.

2) Résultats produits par les calculs gogolandais : $a \Delta 1 = 1 - a$ et $1 \Delta b = 1 - \frac{1}{b}$.

3) A-t-on pour tous nombres a et b non nuls $a \Delta b = b \Delta a$? D'une part $a \Delta b = 1 - \frac{a}{b}$ et d'autre part $b \Delta a = 1 - \frac{b}{a}$. On devrait avoir $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ c'est-à-dire $a^2 = b^2$ ou encore $a = b$ ou $a = -b$. On peut en conclure qu'il n'y a pas d'égalité pour tous les couples de nombres non nuls donc que l'opération n'est pas commutative.

4) Résultat produit par

$$\begin{aligned} (a \Delta b) \Delta a &= \left(1 - \frac{a}{b}\right) \Delta a = 1 - \frac{1 - \frac{a}{b}}{a} = \frac{a - 1 + \frac{a}{b}}{a} = \frac{ab + a - b}{ab}; \\ a \Delta (b \Delta a) &= a \Delta \left(1 - \frac{b}{a}\right) \\ &= 1 - \frac{a}{1 - \frac{b}{a}} = 1 - \frac{a}{\frac{a-b}{a}} = 1 - \frac{a^2}{a-b} = \frac{-a^2 + a - b}{a-b}. \end{aligned}$$

5) Simplification de $1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$. On peut en déduire en utilisant un résultat du 2) que $(a \Delta b) \Delta 1$ produit notre $\frac{a}{b}$. On peut alors préciser le calcul qui produit $\frac{1}{b}$, il suffit de poser $a = 1$: $(1 \Delta b) \Delta 1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b}$.

6) Nous venons de voir que nous savons faire :

- Le quotient pour $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = (a \Delta b) \Delta 1$
- Le produit s'obtient en remarquant que pour $b \neq 0$ on a $ab = \frac{a}{\frac{1}{b}}$,

pour $b = 0$ on a $ab = 0$.

Donc :

o $ab = (a \Delta ((1 \Delta b) \Delta 1)) \Delta 1$ dans le premier cas ;

o $0 = a \Delta a$.

- La différence $a - b$ s'obtient par :

o pour $a \neq 0$ on a : $a - b = a \left(1 - \frac{b}{a}\right) = a(b \Delta a) = a \Delta ((1 \Delta (b \Delta a)) \Delta 1) \Delta 1$

o pour $a = 0$ on a simplement $-b$.

- Enfin la somme s'obtient par $a + b = a - (-b)$

Exercice n° 3

Enoncé

La ferme olympique

(Séries ES, L, SMS et STG)

- Les cousins d'Olympe dirigent la ferme olympique. Ses grand-mères maternelle et paternelle ont eu chacune trois enfants qui ont eu chacun trois enfants.
- Cinq cousins d'Olympe vont à la foire du bourg. Ils veulent se peser à la bascule à bestiaux mais celle-ci ne fonctionne qu'à partir de 100 kg. Que faire ? Olympio, le plus malin des cinq, a une idée. Il propose de se peser deux par deux avec toutes les possibilités. Les dix résultats obtenus sont :

110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 et 121.

- Dans le poulailler de la ferme olympique 3 poules pondent 3 œufs en 3 jours.
- Les lapins installés juste à côté prolifèrent bien plus. Au début de l'année, il y avait un seul couple de lapins et chaque couple de lapins se reproduit au rythme de six naissances tous les trois mois (trois mâles et trois femelles).
- Les vaches sont de deux sortes, des blondes au nombre de six et cinq Holstein. Au total six + cinq = onze. Enfin, le coffre de la ferme est protégé par une combinaison donnée par un code secret. Il est obtenu en remplaçant les lettres du mot Scipion par des chiffres.
 1. Combien Olympe a-t-elle de cousins ou cousines ?
 2. Quel est le poids des cinq cousins ?

3. Combien d'œufs pondent vingt-sept poules en vingt-sept jours ?
4. Combien y aura-t-il de lapins dans la ferme au bout d'un an ?
5. L'opération qui donne le nombre de vaches est cryptée. Chaque lettre remplace un chiffre toujours le même et deux lettres différentes remplacent deux chiffres différents. En décryptant cette addition et en choisissant la plus petite valeur pour S vous aurez accès au coffre de la ferme car vous aurez trouvé le code secret !!!!

Solution

1) Parmi les enfants de sa grand-mère maternelle seuls 2 sont des oncles ou des tantes d'Olympe donc il y a 6 cousins. Le 3^{ème} enfant est sa mère qui a donc ses frères ou sœurs et elle-même comme enfants. De même pour sa grand-mère paternelle.

Olympe a donc 12 cousins ou cousines.

2) Chaque cousin s'est pesé avec 4 autres donc la somme de toutes les pesées, 1 156 kg est le quadruple de la somme des 5 poids. $1\ 156 \div 4 = 289$.

Cette somme est impaire donc il y a au moins un poids impair.

S'il y a un seul poids impair la pesée avec les 4 autres a donné 113, 115, 117 et 121 kg. Et on obtient

$$3 \times \text{poids impair} + \text{somme des poids} = 466$$

$$3 \times \text{poids impair} = 177$$

$$\text{poids impair} = 59.$$

On en déduit alors le poids des 4 autres cousins :

$$113 - 59 = 54$$

$$115 - 59 = 56$$

$$117 - 59 = 58$$

$$121 - 59 = 62$$

Il ne peut pas y avoir 2 poids impairs ni 3 poids impairs car il faudrait 6 sommes impaires.

Il ne peut pas y avoir non plus 4 poids impairs et 1 poids pair, car il faudrait 4 sommes impaires.

Enfin **5 poids impairs** ne donnerait aucune somme impaire c'est aussi impossible.

Conclusion, la seule solution est : 54, 56, 58, 59 et 62 kilos

3) Si 3 poules pondent 3 œufs en 3 jours, 27 poules pondent 27 œufs en 3 jours et ces 27 poules pondent $27 \times 9 = 243$ œufs en 27 jours.

4) Pour 1 couple de lapins on a 3 mois plus tard 4 couples de lapins donc 12 mois plus tard $4^4 = 256$ couples et donc 512 lapins.

5) Il y a plusieurs solutions :

$$489 + 5831 = 6320 \text{ ou}$$

$$832 + 5317 = 6149 \text{ et sans doute d'autres ?}$$

Exercice n° 4

Enoncé

Les mauvais garçons

(Séries ES, L, SMS et STG)

Deux mauvais garçons, Nick O'Catane et Jack O'Gadol ont décidé de dévaliser la succursale de Francfort de la banque P.I.L.M. Leur informateur Monsieur Hans Labal, vieux truand de 72 ans, leur a donné le code à six chiffres du coffre sur un papier en leur faisant remarquer que ce nombre était un multiple de son âge. Malencontreusement Nick a partiellement brûlé ce papier avec sa cigarette et voilà nos deux malfrats avec une écriture $53\bullet 41\bullet$ où $\bullet$ représente un trou de cigarette. Nick est désespéré mais Jack lui dit : ne t'inquiète pas, je sais comment reconstituer le code. Comment va - t-il faire pour retrouver les chiffres compris entre 0 et 9 qui ont été brûlés ?

Solution

Un nombre est divisible par 72 si et seulement si il est divisible par 9 et par 8. Ecrivons le nombre cherché sous la forme $53a41b$ avec a et b chiffres compris entre 0 et 9.

Un nombre est divisible par 9 si et seulement la somme de ses chiffres est divisible par 9. Il faut que $13 + a + b$ soit divisible par 9, or $a + b$ est compris entre 0 et 18 donc $13 + a + b$ est compris entre 13 et 31 et ne peut prendre que les valeurs 18 et 27 ce qui correspond à $a + b = 5$ ou $a + b = 14$. Enfin b doit être pair ce qui donne :

Pour $a + b = 5$ on a : 535410, 533412, 531414 dont aucun n'est divisible par 8 !

Pour $a + b = 14$ avec b pair et $a \leq 9$ on a deux possibilités : 538416, 536418 dont seul le premier convient.

Le code secret était donc : **538416**.