

REIMS

Exercice n° 1

Enoncé

Le code postal français

Sur le courrier que vous recevez par la poste, vous avez peut être remarqué une série de bâtonnets de couleur orange inscrits en bas à droite des enveloppes.

Il s'agit en fait d'un codage du code postal utilisé pour le tri automatique du courrier.

Le tableau ci-dessous vous montre cinq exemples de code postal avec leur codage en bâtonnets. Examinez-les attentivement afin de trouver quel est le code postal représenté par la dernière série de bâtonnets.

Code postal	Codage en bâtonnets
51100	
52130	
08400	
75006	
13007	

Solution

Une étude attentive du tableau montre que :

- a) Chaque chiffre du code postal est codé par six symboles : 4 barres et 2 « blancs ».

- b) en recherchant le codage du 5 et du 0 (zéro), on réalise que les chiffres du code postal sont codés dans l'ordre inverse.
 c) que la table des chiffres de 0 à 8 est donnée par :

0	••
1	• •
2	• •
3	• •
4	••
5	• •
6	• •
7	••
8	• •

- d) On a ainsi utilisé 9 combinaisons de 2 blancs pris parmi 5 symboles. Or $\binom{5}{2} = 10$.

9 est donc codé par les combinaisons non encore utilisées : 9 : |||..|.

- e) La dernière ligne représente donc le code postal **94310** (..|||.|.|||.|||.||..|||||.|).

Exercice n° 2

Enoncé

L'âge du capitaine

L'année de ses 20 ans un capitaine commence à économiser 100 € le premier de chaque mois dès le mois de janvier.

Il essaie d'économiser chaque année dix euros de plus par mois que l'année précédente.

Cependant il s'est retrouvé au chômage une année entière coïncidant avec une année civile (il n'a donc alors pas pu économiser).

De plus l'année de reprise, il n'a pas pu mettre sur son compte épargne plus que l'année précédant son chômage.

Le 31 décembre 2047, il s'achète un bateau.

Pour cela, il a besoin de tout l'argent qu'il a sur son compte épargne. Celui-ci atteint un montant de 33 000 €.

- Quel est l'âge du capitaine en 2047 ?
- A quel âge a-t-il été au chômage ?

Solution (Paul-Louis Hennequin)

Soit x l'âge du capitaine en 2047 et y l'âge où il a été en chômage. De l'âge de 20 à l'âge $y - 1$, il a économisé :

$$1200(y - 20) + 120(1 + 2 + \cdots + y - 21) = 1200(y - 20) + 120 \frac{(y - 21)(y - 20)}{2};$$

de l'âge $y + 1$ à l'âge x , il a économisé :

$$1200(x - y) + 120[(y - 21) + (y - 20) + \cdots + (x - 22)] =$$

$$1200(x - y) + 120 \left[\frac{(x - 22)(x - 21)}{2} - \frac{(y - 22)(y - 21)}{2} \right],$$

soit en tout, de l'âge 20 à l'âge x :

$$1200(x - 20) + 60[(x - 22)(x - 21) + 2(y - 21)]$$

qui doit être égal à 33000.

On en déduit $x^2 - 23x + 2y = 530$.

Or $21 \leq y \leq x - 1$ d'où $530 - 2x + 2 \leq x^2 - 23x \leq 530 - 42$ ou $x^2 - 21x \geq 532$ et $x^2 - 232 \leq 488$.

Or on a $x \geq 20$ et sur $[20, +\infty[$, les deux fonctions $x \mapsto x^2 - 21x$ et $x \mapsto x^2 - 23x$ sont croissantes.

$$\text{On en déduit } x \geq \frac{21 + \sqrt{(21)^2 + 2128}}{2} \geq \frac{21 + 50}{2} = 35,5$$

$$\text{et } x \leq \frac{23 + \sqrt{(23)^2 + 1952}}{2} \leq \frac{23 + 50}{2} = 36,5.$$

La seule valeur entière possible est donc $x = 36$ et on vérifie qu'alors

$$x^2 + 21x = 36 \times 15 = 540 \geq 532$$

$$\text{et } x^2 - 23x = 36 \times 13 = 468 \leq 488.$$

On a alors $y = \frac{530 - x(x - 23)}{2} = 31$. En utilisant un tableur, on vérifie :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Age	20	21	225	23	24	25	26	27	28
Economies/mois	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Economies/an	1200	1320	1440	1560	1680	1800	1920	2040	2160
Total des écon.	1200	2520	3960	5520	7200	9000	10920	12960	15120
Année	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039

	10	11	12	13	14	15	16	17
Age	29	30	31	32	33	34	35	36
Economies/mois	190	200	0	200	210	220	230	240
Economies/an	2280	2400	0	2400	2520	2640	2760	2880
Total des Econ.	17400	19800	19800	22200	24720	27360	30120	33000
Année	2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047

En 2047, le total des économies se monte à 33 000 €.

Cette année-là, le capitaine a 36 ans

Il s'est retrouvé au chômage à 31 ans, en 2042.

Solution voisine (Henri Bareil)

La solution « officielle » prosait, sans explications, le seul tableau ci-dessus. Se posait la question de sa réalisation.

Pour y voir clair, j'envisage, sur un petit nombre d'années, 8 par exemple, comment les choses se passent suite à l'année de chômage :

Je laisse à part le fixe de 1200€ qui lui, est le moins perturbé.

D'où le tableau avec chômage la troisième année :

N ^{os} des années	1	2	3	4	5	6	7	8
Economies fixes	1200	1200	0	1200	1200	1200	1200	1200
Surplus	0	120	0	120	240	360	480	600

et le tableau avec chômage la sixième année :

N ^{os} des années	1	2	3	4	5	6	7	8
Economies fixes	1200	1200	1200	1200	1200	0	1200	1200
Surplus	0	120	240	360	480	0	480	600

J'y note que :

- si l'on met à part l'année de reprise du travail, la ligne des surplus est la même soit, après le zéro :

120; 240; 360; 480; 600

c'est-à-dire

$120 \times 1; 120 \times 2; 120 \times 3; 120 \times 4; 120 \times 5$

- le numéro de l'année de chômage n'est pas indifférent. Dans le premier tableau il me fait ajouter 120 à la suite précédente alors que dans le second, il me fait ajouter 480.
- le fixe 1200 intervient autant de fois, moins 1, qu'il y a d'années,
- le dernier multiplicateur de 120 dans la ligne des surplus est le nombre d'années diminué de 3.

De là :

MÉTHODE 1 (théorique)

Nombre total d'années d'économie : p

Les années seront numérotées de 1 à p .

Soit n le numéro de l'année de chômage.

- Economies totales « en fixe » : $1200 \text{ €} \times (p - 1)$.
- Surplus **sans l'année de reprise**, en € :
 $120 \times 1 + 120 \times 2 + \dots + 120(n - 2) + 120n + \dots + 120(p - 3)$
soit $120 \times (1 + 2 + 3 + \dots + (p - 4) + (p - 3))$
On somme $1 + 2 + 3 + \dots + (p - 4) + (p - 3)$ par la méthode de Gauss et on obtient : $\frac{(p - 2)(p - 3)}{2}$ c'est-à-dire $\frac{p^2 - 5p + 6}{2}$
- Le surplus de l'année de reprise, non encore comptabilisé, est, en € : $120(n - 2)$.

- De là l'égalité, tous les termes étant en $\mathbb{E}$:
 $1200(p-1) + 60(p^2 - 5p + 6) + 120(n-2) = 33\,000$,
 soit, en divisant par 60 : $20(p-1) + p^2 - 5p + 6 + 2(n-2) = 550$
 et en réduisant : $p^2 + 15p - 568 + 2n = 0$
 Dès lors $\Delta = 15^2 + 2272 - 8n = 2497 - 8n$.
 Or, n étant un entier positif compris entre 1 et 17, l'énoncé impose à Δ
 d'être le carré d'un entier. Le plus proche carré inférieur à 2497 est 2401,
 carré de 49, ce qui correspond à $8n = 96$, soit **$n=12$** .
 (D'après nos remarques, il ne peut pas y avoir d'autre valeur de n).
 Dès lors $p = \frac{(-15 \pm 49)}{2}$ soit, seule valeur possible, **$p=17$** .

MÉTHODE 2 (par essais successifs !)

Par exemple

- *J'essaie 10 années*
 Alors, en utilisant les remarques initiales, les économies sont, en $\mathbb{E}$:
 $1200 \times 9 + 120(1 + 2 + \dots + 7) + \text{surplus reprise}$
 soit $10\,800 + 120 \times 28 + \text{surplus reprise}$
 c'est-à-dire $14\,160 + \text{surplus reprise}$ (lequel est inférieur à 120×7)
 Nous sommes bien loin de compte !
- *Avec un essai de 15 années, j'obtiens :*
 $1200 \times 14 + 120(1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 + 12) + \text{surplus reprise}$, soit
 $26\,160 + \dots$
 Encore trop petit.
- *Un essai de 20 ans me donne :*
 $1200 \times 19 + 120(1 + 2 + \dots + 16 + 17) + \text{surplus reprise}$, soit $41\,160 + \dots$
 Trop grand !
- *Avec 18 ans, j'obtiens $33\,600 + \dots$. Encore trop, mais de si peu !*
- *Avec 17 ans, j'obtiens $31\,800 + \text{surplus reprise}$.*
 Ce surplus est donc 1200.
 En divisant par 120, j'obtiens 10 qui est (Cf. les tableaux initiaux) *le rang*
de l'année de chômage diminué de 2.
 D'où...

Question : (Quelle méthode préférer ?)

Surtout ne discréditons pas la méthode 2 ! Sinon nous induisons trop de copies blanches... dès qu'on ne sait pas théoriser. Et le pas de la méthode 2 à la méthode 1 est minime !

L'essentiel est, finalement, le décryptage de l'énoncé sur des exemples simples... Puis peu importe la méthode, encore que la plus formelle soit la plus apte à engendrer de bons résultats en maths.