

LA RÉUNION

Exercice n° 1

Énoncé

Les nombres

A traiter par les candidats n'étant pas en première S.

On écrit, dans l'ordre croissant, la liste des nombres qui sont des carrés ou des cubes de nombres entiers strictement positifs : 1 ; 4 ; 8 ; 9 ; 16 ; 25 ; 27 ; 36 ; 49 ; 64 ; etc.

Combien y a-t-il de nombres inférieurs à 2 006 dans cette liste ?

Solution

L'inégalité $n^2 \leq 2006$ est vérifiée pour les entiers naturels n inférieurs ou égaux à 44. Dans la liste demandée - qui commence à 1 - il y a donc 44 nombres de la forme n^2 .

De même, l'inégalité $m^3 \leq 2006$ est vérifiée pour les entiers naturels m inférieurs ou égaux à 12.

La liste demandée contient donc 12 nombres de la forme m^3 . Mais il faut enlever, parmi ces derniers, ceux qui sont des carrés parfaits et qui ont déjà été comptabilisés au préalable (on enlève en fait les puissances sixièmes). En examinant les 12 derniers nombres précédents, on s'aperçoit que 3 d'entre eux sont des carrés parfaits : $1(1^3 = 1^2)$; $64(8^2 = 4^2)$; $729(9^3 = 27^2)$.

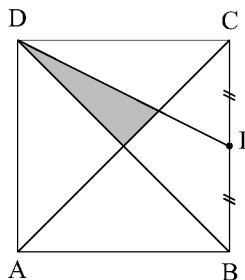
La liste demandée contient donc $44 + 12 - 3$, **c'est-à-dire 53 nombres**.

Exercice n° 2

Énoncé

Dans un carré...

Question 1 : à traiter par tous les candidats.



Soit $ABCD$ un carré et I le milieu du côté $[BC]$. L'aire du triangle grisé est une fraction de l'aire du carré $ABCD$. Laquelle ? Justifier.

Question 2 : A traiter par les élèves de première S.

Peut-on généraliser le résultat précédent au cas où $ABCD$ est un parallélogramme ? (I est encore le milieu de côté $[BC]$).

Solution

Désignons par M l'intersection des segments $[DI]$ et $[AC]$, et par O le centre du carré.

Question 1 :

Les droites (DI) et (CO) sont deux médianes du triangle DCB . M est donc le centre de gravité de ce dernier et par conséquent $\frac{OM}{OC} = \frac{1}{3}$. Les triangles DOM et DOC ont la même hauteur issue de D . D'où $\frac{\text{aire}(DOM)}{\text{aire}(DOC)} = \frac{1}{3}$.

Comme d'autre part $\frac{\text{aire}(DOC)}{\text{aire}(ABCD)} = \frac{1}{4}$, on obtient : $\frac{\text{aire}(DOM)}{\text{aire}(ABCD)} = \frac{1}{12}$.

Question 2 :

Les propriétés géométriques utilisées dans la démonstration précédente sont vraies dans les cas où $ABCD$ est un parallélogramme.

La réponse précédente est donc encore valide dans ce cas.

Exercice n° 3

Enoncé

A traiter par les candidats de première S.

Combien existe-t-il d'entiers naturels dont l'écriture n'utilise pas deux fois le même chiffre ?

Solution

Comme il n'y a que 10 chiffres différents dans l'écriture décimale, un entier qui ne comporte pas deux fois le même chiffre ne peut en avoir plus de 10.

Soit k un entier entre 1 et 10. Il s'agit d'évaluer le nombre d'entiers de k chiffres qui répondent à la question.

Pour choisir le premier chiffre d'un tel entier (c'est-à-dire le chiffre le plus à gauche), on a 9 possibilités puisque 0 est exclu dans ce cas (l'entier n'aurait que $k - 1$ chiffres).

Pour le second chiffre, on a 9 possibilités, car on ne peut choisir le premier chiffre (et 0 est accepté).

Pour le 3^{ème} chiffre, il y a 8 possibilités, etc.

En conclusion, il y a 9 entiers non nuls composés d'un seul chiffre, 9×9 entiers composés de 2 chiffres distincts, $9 \times 9 \times 8$ entiers composés de trois chiffres distincts, etc.

Finalement, le nombre d'entiers ne contenant pas deux fois le même chiffre est égal, en tenant compte de 0 dont l'écriture n'a pas été envisagée ci-dessus :

$$1 + 9 + 9.9 + 9.9.8 + 9.9.8.7 + 9.9.8.7.6 + 9.9.8.7.6.5 + 9.9.8.7.6.5.4 + 9.9.8.7.6.5.4.3 + 9.9.8.7.6.5.4.3.2 + 9.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = \mathbf{8877691}.$$