

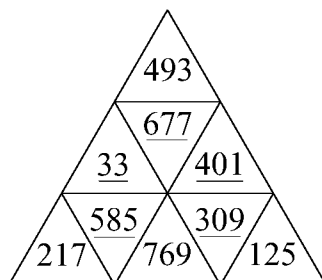
POITIERS

Exercice n° 1

Enoncé

Les triangles magiques

Pour l'anniversaire des 92 ans de Mémé en 2005, un ami magicien lui a envoyé ce cadeau :



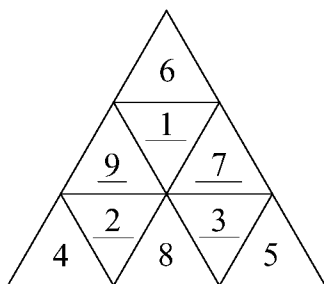
Il s'agit d'un triangle magique :

- sur les bordures de chacun des trois côtés, la somme des cinq nombres est 2005
- les nombres utilisés vont de 92 en 92.
- les cinq nombres soulignés formant une couronne ont aussi pour somme 2005 ($585 + 33 + 677 + 401 + 309 = 2005$).

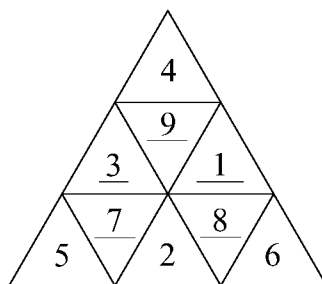
1°) Prenons les nombres de 1 à 9 (donc de 1 en 1) à répartir dans les neuf cases de triangles magiques.

Quelles sommes magiques différentes peut-on obtenir, en respectant la règle des trois totaux identiques de cinq nombres, ainsi que la règle du même total en couronne ?

Voici deux triangles possibles, l'un de somme 22, l'autre de somme 28.

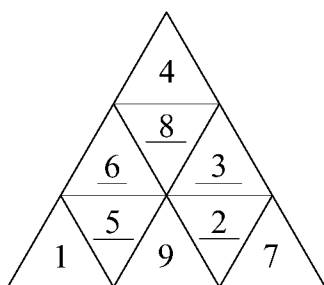


Somme 22

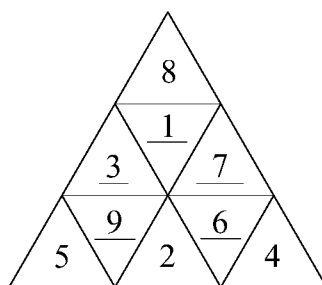


Somme 28

- a) Pourquoi ne peut-on obtenir de somme inférieure à 22 ou supérieure à 28 ?
- b) Les sommes magiques possibles avec les nombres de 1 à 9 sont 22, 24, 25, 26, 28. On admet qu'on ne peut obtenir les sommes 23 ou 27. Voici les triangles 24 et 26 :



Somme 24



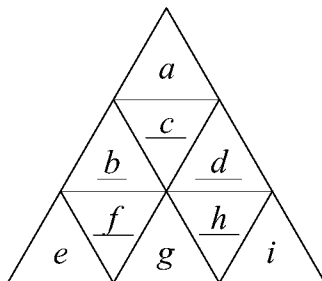
Somme 26

Donner un triangle magique de somme 25.

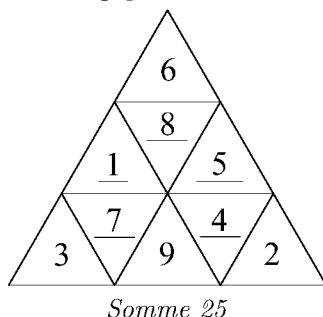
- 2°) En vous aidant des exemples précédents, construisez un triangle magique de somme 2006 utilisant des nombres allant de 93 en 93 pour le prochain anniversaire de Mémé.
- 3°) Aurait-on pu souhaiter l'anniversaire des 90 ans en 2003 ?

Solution

- 1°) Donnons un nom aux neuf nombres à placer.



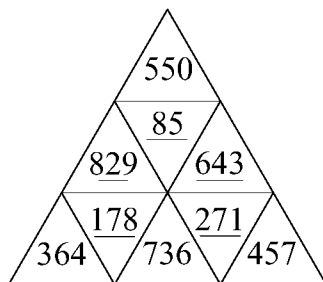
En tournant autour du triangle on peut obtenir trois fois la somme magique, en utilisant les notations ci-dessus on obtient alors $2a + 2c + 2e + 2f + 2h + 2i + b + d + g$, soit deux fois la somme des neuf nombres de 1 à 9 (soit 2×45) diminuée du total des nombres $(b + d + g)$. La somme magique vaut donc $30 - \frac{b + d + g}{3}$. Comme b, d, g sont des nombres différents leur minimum est $1 + 2 + 3 = 6$, et leur maximum est $7 + 8 + 9 = 24$. On obtient une somme magique minimum de $30 - 8 = 22$ et une somme magique maximum de $30 - 2 = 28$.



2°) Pour 2006, comment construire un triangle avec des nombres allant de 93 en 93 ?

Soit a le plus petit des neuf nombres à utiliser. En copiant le triangle magique de somme 22 = $1 + 2 + 4 + 6 + 9$ où les nombres vont de 1 en 1 à partir de 1, on peut imaginer un triangle où les nombres vont de 93 en 93 à partir de a , dont la somme est : $a + (a + 93) + (a + 3 \times 93) + (a + 5 \times 93) + (a + 8 \times 93) = 5a + 17 \times 93 = 5a + 1581$.

On obtient $5a + 1581 = 2006$, $5a = 425$ d'où $a = 85$.



3°) Comment construire un triangle de somme 2003 avec des nombres allant de 90 en 90 ?

Soit a le plus petit des neuf nombres à utiliser. En copiant le triangle magique de somme 22 = $1 + 2 + 4 + 6 + 9$ où les nombres vont de 1 en 1 à partir de 1, on peut imaginer un triangle où les nombres vont de 90 en 90 à partir de a , dont la somme est : $a + (a + 90) + (a + 3 \times 90) + (a + 5 \times 90) + (a + 8 \times 90) = 5a + 17 \times 90 = 5a + 1530$.

On obtient $5a + 1530 = 2003$, $5a = 473$ ce qui est impossible avec a entier.

En copiant le triangle magique de somme 24 = $1 + 4 + 5 + 6 + 8$, on imagine une

somme de 2003 = $a + (a + 3 \times 90) + (a + 4 \times 90) + (a + 5 \times 90) + (a + 7 \times 90) = 5a + 19 \times 90 = 5a + 1710$ d'où $5a = 293$ qui n'a pas de solution.

On peut continuer sur les modèles 25, 26, ou 28, on échoue. La somme de cinq nombres formant la somme magique est de la forme $(5a + 90k)$. Si la somme magique cherchée est 2003, il n'y a pas de solution car $5a$ ne peut finir par 3.

Il n'y a pas eu de souhait d'anniversaire en 2003...

Exercice n° 2

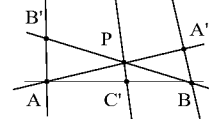
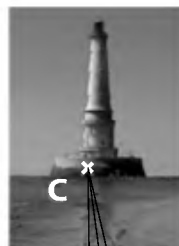
Enoncé

Le phare de Cordouan

Devoir de vacances : de la plage de la Palmyre en Charente-Maritime on peut observer le plus vieux phare du monde en activité. Il s'agit du phare de Cordouan qui, depuis plus de 4 siècles, indique aux navigateurs, l'embouchure de la Gironde et certains bancs de rochers dangereux. Mais à quelle distance de la plage peut bien se situer ce phare ? Pour répondre à cette question on a donc placé sur la plage à marée basse, les sommets d'un quadrilatère $ABA'B'$, tel que le phare de Cordouan en C soit aligné avec A et B' . Nous avons décidé d'emblée que les diagonales du quadrilatère se couperaient en P , là où se situait le parasol de mon beau-frère Marcel qui se lamentait de ne pouvoir faire voler son cerf-volant en l'absence de vent ! La longueur ℓ du cordage du cerf-volant sus-indiqué nous a permis de placer A, A' et B' tels que : $PA = PA' = PB' = \ell$. Il a fallu avancer jusqu'en B dans l'alignement de P et B' pour que B soit aligné avec A' et le phare situé en C . Sur la droite (AB) on a pu déterminer le point C' aligné avec P et C . On a pris les mesures suivantes en mètres :

$$\ell = 150 ; PB = \ell + 5 ; PC' = \frac{\ell}{2}$$

Mon beau-frère Marcel n' a jamais été convaincu de ma démonstration qui lui prouvait que ce phare était éloigné de plus de 9 km, qu'en pensez vous ?



Indication : une solution possible est de démontrer le résultat suivant avant de l'appliquer.

Étant donné un triangle ABC quelconque et un point P à l'intérieur tel que :

- o (AP) coupe [BC] en A'.
- o (BP) coupe [AC] en B'.
- o (CP) coupe [AB] en C'

alors, quel que soit P, on a l'égalité : $\frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = 2$.

Solution

1^{ère} solution

L'égalité à démontrer serait évidente si P était le centre de gravité du triangle, car chacune des fractions est égale à $\frac{2}{3}$.

Si P est le barycentre de (A, m_1), (B, m_2) et (C, m_3), (AP) coupe (BC) au point A' qui est donc le barycentre partiel de (B, m_2) et (C, m_3), on a donc :

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{AP} = m_2\overrightarrow{AB} + m_3\overrightarrow{AC} = (m_2 + m_3)\overrightarrow{AA'}$$

Remarque : un élève de première n'est pas censé savoir que tout point du plan admet des coordonnées barycentriques par rapport à 3 points non alignés, mais il peut procéder par construction partielle en choisissant d'abord $m_2 = A'C$ et $m_3 = A'B$, puis en choisissant m_1 pour que P soit barycentre de (A, m_1) et de (A', $m_2 + m_3$).

En considérant que B' est barycentre partiel de (A, m_1) et (C, m_3) on montre de même que

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{BP} = m_1\overrightarrow{BA} + m_3\overrightarrow{BC} = (m_1 + m_3)\overrightarrow{BB'}.$$

En considérant que C' est barycentre partiel de (A, m_1) et (B, m_2), on montre de même que

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{CP} = m_1\overrightarrow{CA} + m_2\overrightarrow{CB} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{CC'}.$$

Le point P étant à l'intérieur du triangle, on peut supposer que les masses m_i sont positives.

On a donc :

$$\frac{AP}{AA'} = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \frac{BP}{BB'} = \frac{m_1 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \text{ et } \frac{CP}{CC'} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

On en déduit que $\frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{2(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} = 2$.

Autre méthode :

$$\begin{aligned}\frac{AP}{AA'} &= \frac{AA' - A'P}{AA'} = 1 - \frac{A'P}{AA'} \\ &= 1 - \frac{\text{aire } PBC}{\text{aire } ABC} \text{ et, de même } \dots\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = 3 - \frac{\text{aire } ABC}{\text{aire } ABC} = 2.$$

Appliquons ce résultat dans le cas où : $PA = PB' = PA' = 150$, $PB = 155$ et $PC' = 75$, posons $PC = x$, on a donc l'équation :

$$\frac{150}{300} + \frac{155}{305} + \frac{x}{x+75} = 2$$

équivalente à :

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+75} &= \frac{244 - 61 - 62}{122} \Leftrightarrow \frac{x}{x+75} = \frac{121}{122} \\ 122x &= 121x + 9075 \Leftrightarrow x = 9075\end{aligned}$$

Le phare est donc situé à 9,075 km du parasol.

Si $PB \geq \ell + 5 + \varepsilon$ le phare est à moins de 9km : à vous de chercher $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$!

2^{ème} solution :

Considérons la parallèle à (AB) passant par P , et ses points d'intersection X et Y avec respectivement (CA) et (CB) .

$$\text{On a } \frac{A'P}{A'A} + \frac{B'P}{B'B} = \frac{XP}{AB} + \frac{YP}{AB} = \frac{XY}{AB} = \frac{CP}{CC'}.$$

Appliquons ce résultat dans le cas où : $PA = PB' = PA' = 150$, $PB = 155$ et $PC' = 75$, posons $PC = x$, on a donc l'équation :

$$\frac{150}{300} + \frac{150}{305} = \frac{x}{x+75}$$

Qui aboutit à la solution $x = 9075$. Si on augmente PB de 5 cm, l'équation : $\frac{1}{2} + \frac{150}{305,05} = \frac{x}{x+75}$ aboutirait à une solution inférieure à 9000. D'où la méfiance de mon beau-frère, peut-être ?

Palmarès

Premier prix : DUBOIS Hugues - Lycée Elie Vinet -
BERBEZIEUX ST HILAIRE

Deuxième prix : VALLON Jason - Lycée Charles Augustin Coulomb -
ANGOULEME

Troisième prix : ENTEM Even - Lycée Cordouan - ROYAN

Statistiques

Séries	Inscrits	Ayant composé	
		Filles	Garçons
ES	2	0	1
L	4	0	0
S	104	9	46
SMS	3	1	0
Total	113	10	47