

PARIS

Exercice n° 1

Enoncé

Les billes

Dans un tube fermé d'extrémités S et T de longueur L , sont placées 3 billes B_1 , B_2 et B_3 qui ne peuvent que s'entrechoquer en glissant dans un sens ou dans l'autre à l'intérieur du tube.

A l'instant $t = 0$,

- La bille B_1 est en S et est lancée vers T à une vitesse v telle qu'elle parcourt la distance L en 1 minute.
- La bille B_2 est en T et est lancée vers S avec la même vitesse.
- La bille B_3 est placée, sans vitesse initiale, en un point A du tube tel que :

$$SA = \frac{1}{3}ST.$$

Lorsqu'il y a choc entre 2 billes, elles repartent chacune en sens opposés toujours avec la même vitesse v .

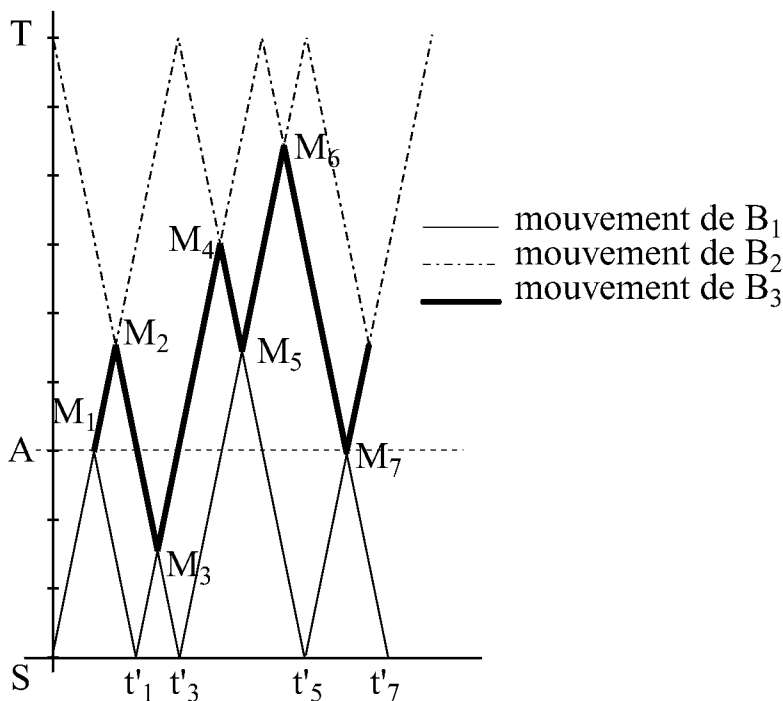
Lorsqu'une bille arrive en S ou en T, elle repart en sens inverse toujours avec la même vitesse.

On assimilera les billes à des points, on supposera qu'il n'y a aucun frottement et que les billes sont animées de la même vitesse dans un sens ou dans l'autre. La bille B_3 est frappée alternativement par B_1 et par B_2 , et circule dans le tube à la vitesse v .

1. Après 2006 chocs, combien de fois B_3 est-elle passée par le point A ?
2. Après 2006 chocs combien de fois la bille B_3 a-t-elle été frappée en A ?
3. Quelle est la distance parcourue par la bille B_3 entre le 1^{er} choc et le 2006^{ème} choc ?

Solution

Une représentation graphique montre que le mouvement des trois billes est périodique. La position des billes au moment du 7^{ème} choc est identique à celle des billes lors du 1^{er} choc.



Avant le septième choc, la bille B_3 est en A à trois instants et elle est heurtée en A une fois

En remarquant que $2006 = 334 \times 6 + 2$, on peut en déduire que la bille B_3 est en A, $334 \times 3 + 1 = 1003$ fois et qu'elle est frappée 335 fois en A.

On peut par le calcul montrer qu'au septième choc, la bille B_3 est en A.

L'unité de temps est la minute et on a $L = v \times 1$.

Soit $t_1, t_2, \dots, t_7$ les instants où la bille B_3 est percutée par B_1 ou B_2 .

Soit t'_1, t'_3, t'_5 les instants où B_1 est en S.

Soit t'_2, t'_4 , les instants où la bille B_2 est en T : $t_1 = \frac{1}{3}$ et $t_2 = \frac{1}{2}$.

Après le premier choc, la bille B_1 revient en S à l'instant t'_1 tel que

$$t'_1 = 2 \times t_1 = \frac{2}{3}$$

. Le troisième choc a lieu en un point M du tube tel que $SM + MT = L$. On a $SM = v \times (t_3 - t'_1)$ et $MT = v \times t_3$ donc

$$SM + MT = v \times (t_3 - t'_1) + v \times t_3 = L = v \times 1.$$

D'où $t_3 = \frac{5}{6}$.

On obtient de même successivement

$$t'_2 = 2 \times t_2 = 1, \quad t_4 = \frac{4}{3}, \quad t'_3 = 1, \quad t_5 = \frac{3}{2}, \quad t'_4 = \frac{5}{3}, \quad t_6 = \frac{11}{6}, \quad t'_5 = 2 \text{ et enfin } t'_7 = \frac{7}{3}$$

Entre le 1^{er} et le 7^{ème} chocs, la bille a parcouru $v \times (t_7 - t_1) = 2 \times v = 2 \times L$.

Au 2006^{ème} choc elle a parcouru $334 \times 2L + \frac{1}{6} \times L = 668 \times L + \frac{1}{6}L$.

Exercice n° 2

Enoncé

Les cartes

2006 cartes sont numérotées de 1 à 2006.

Elles sont mélangées et empilées.

La carte au sommet de la pile est placée sur la table, la suivante est placée sous la pile. Puis la carte suivante sur la pile est placée sur la table à droite de la carte précédemment posée et la carte suivante sous la pile.

On continue ainsi jusqu'à ce que toutes les cartes soient alignées sur la table.

Supposons que, fait rarissime!, les cartes soient alors alignées (de gauche à droite) dans l'ordre 1, 2, ..., 2005, 2006.

Au départ, combien de cartes étaient-elles empilées au-dessous de la carte 2005 ?

Solution

On reconstitue la pile à partir de la fin. La dernière pile juste avant la fin du processus est (2004, 2006, 2005). Les précédentes sont (2003, 2005, 2004, 2006), puis (2002, 2006, 2003, 2005, 2004)... Si n désigne la hauteur de la pile et m le nombre de cartes au-dessous de la carte 2005, alors la pile (n, m) est précédée par la pile :

Si $m \neq 0$ alors $(n+1, m-1)$ sinon $(n+1, n-1)$.

Avec ces notations on obtient les piles ; (3, 0), (4, 2), (5, 1), (6, 0), ..., (12, 0), ..., (1536, 0), ..., (2000, 1072), ..., (2006, 1066).

On peut aller assez vite en constatant que, d'une pile $(n, 0)$ on passe à une pile $(2n, 0)$ en trois étapes et aller en doublant...

Au départ, il y a donc 1066 cartes au-dessous de la carte 2005.

Remarque : Cet exercice est adapté de l'exercice suivant :

There are cards labeled from 1 to 2000. The cards are shuffled and placed in a pile. The top card is placed on the table, then the next card at the bottom of the pile. Then the next card is placed on the table to the right of the first card, and the next card is placed at the bottom of the pile. This process is continued

until all the cards are on the table. The final order (from left to right) is 1, 2, 3, ..., 2000. In the original pile, how many cards were above card 1999?

18th AIME1 2000 (American Invitational Mathematics Examination)

Solution (A. Guillemot)

Approche calculatrice.

Commençons d'abord par faire subir à un paquet de 2006 cartes numérotées de 1 à 2006 sans être mélangées les manipulations prévues.

Au départ nous avons la liste $L_0 = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2003, 2004, 2005, 2006\}$

Après un tour il reste $L_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2002, 2004, 2006\}$

Après le deuxième tour, il reste $L_2 = \{4, 8, 12, 16, \dots, 2000, 2004\}$

Après le troisième tour, il reste $L_3 = \{4, 12, 20, \dots, 1996, 2004\}$

Remarquons que :

Pour passer de L_n à L_{n+1} , on prend un terme sur deux de L_n .

Si L_n et L_{n+1} se terminent par le même nombre, le premier nombre de L_{n+2} est le deuxième de L_{n+1}

Si L_n et L_{n+1} ne se terminent pas par le même nombre, le premier nombre de L_{n+2} est le premier de L_{n+1}

Poursuivons cet algorithme à la calculatrice jusqu'à obtenir une liste à un seul nombre.

Conditions initiales :

Dans L_3 on met la liste $\{4, 12, 20, \dots, 1996, 2004\}$.

Dans L on met la longueur de la liste L_3 .

Dans D on met le dernier terme de la liste précédente.

```
seq(N,N,4,2004,8
)→L3
{4 12 20 28 36 ...
dim(L3)→L
251
2004→D
2004
```

On enregistre le programme correspondant à l'algorithme ci-dessus :

```
PROGRAM:PARIS
:While L>1
:If L3(L)=D
:Then
:seq(L3(I),I,2,L
,2)→L3
:Else
:L3(L)→D
```

```
PROGRAM:PARIS
:seq(L3(I),I,1,L
,2)→L3
:End
:dim(L3)→L
:Pause L3
:End
:Disp L3
```

On l'exécute :

```
(12 44 76 108 1...)
(44 108 172 236...)
(44 172 300 428...)
(172 428 684 94...)
(428 940 1452 1...)
      (940 1964)
            (1964)
```

Les deux dernières cartes posées porteront les numéros 940 et 1964

Prenons maintenant le tas de cartes mélangées.

Si l'on veut que la carte 2005 soit posée en avant-dernière position, elle doit donc occuper la position 940 (à partir du dessus) dans le tas de cartes mélangées. Ce qui impose d'en avoir 1066 au dessous.