

ORLÉANS-TOURS

Exercice n° 1

Enoncé

Le pentagone régulier

Soit ABC un triangle isocèle ($AB = AC$) dont l'angle en A est obtus ($\pi/2 < \hat{A} < \pi$).

Pour les constructions on prendra $AB = 8$ cm.

Toutes les constructions demandées se feront à la règle et au compas. On laissera apparentes sur la feuille les constructions intermédiaires.

1° Sur votre feuille, compléter le triangle ABC par deux points D, E de telle sorte que $AB = BD = DE = EC$, que la figure $ABDEC$ admette pour axe de symétrie la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ et que les points D et E ne soient pas du même côté de la droite (BC) .

2° En déduire la construction d'un pentagone $AMNPQ$ dont les cinq côtés ont la même longueur et tel que le point M appartienne au segment $[AB]$, les points N et P appartiennent au segment $[BC]$ et le point Q appartienne au segment $[CA]$. On expliquera et justifiera la construction.

3° a) On suppose que le pentagone $ABDEC$ de la question 1° est régulier (ses angles en A, B, C, D, E sont alors égaux). Quelle est la valeur nécessaire de l'angle $\hat{A}$? On note β cette valeur, et on pose $\beta = \frac{\alpha}{3}$.

Montrer que $\alpha = \widehat{ABC}$ et que $2\alpha = \widehat{CBD}$. En déduire que l'angle α vérifie la relation particulière : $\cos(\alpha) = \frac{1}{2} + \cos(2\alpha)$.

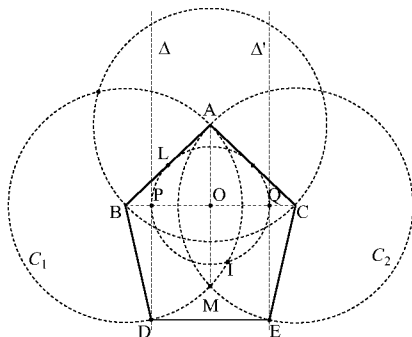
3° b) Inversement on suppose que $\hat{A} = \beta$. Démontrer qu'alors le pentagone $ABDEC$ est régulier.

Solution

1° On commence par tracer la médiatrice de $[AB]$ et de $[BC]$ pour déterminer les milieux L de $[AB]$, et O de $[BC]$. On porte ensuite le point P sur le segment $[BO]$ tel que $OP = AL = \frac{AB}{2}$ et le point Q sur le segment $[OC]$ tel que $OQ = AB/2$.

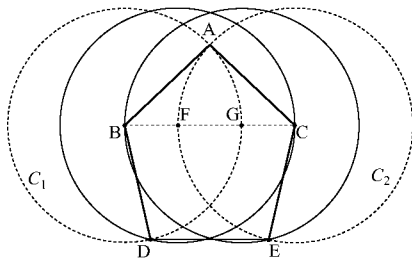
On trace les cercles C_1 de centre B et de rayon BA et C_2 de centre C et de rayon CA .

On trace la perpendiculaire Δ en P à $[BC]$ et le point d'intersection D de C_1 et de même on trace la perpendiculaire Δ' en Q à $[BC]$ et le point d'intersection E de C_2 et Δ' ainsi $PQED$ est un rectangle et donc $PQ = DE = AB$ donc on a bien $AB = BD = DE = EC = CA$

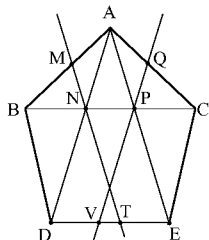


Autre solution : étant donné le triangle ABC , on trace le cercle C_1 de centre B et de rayon AB , ainsi que le cercle C_2 de centre C et de rayon AB . C_1 intersecte le segment $[BC]$ au point G . supposons construits les points D et E . $BG \parallel ED$ et $BG = ED$ donc la figure $BGED$ est un parallélogramme. En particulier $BD = GE = AB$. On trace alors le cercle C_3 de centre G et de rayon AB , qui doit contenir le point E . Donc E se trouve à l'intersection de C_2 et de C_3 .

Pour récupérer le point D , on procède de la même façon en introduisant le point $F \in [BC]$ tel que $CF = AB$, et le cercle C_4 de centre F et de rayon AB ; D est alors situé à l'intersection de C_4 et de C_1 .



2°



Traçons la droite (AD) qui rencontre (BC) en N . Traçons ensuite la droite passant par N et parallèle à (BD) : on peut par exemple construire le parallélogramme $BDTN$ en traçant le cercle de centre N et de rayon BD qui rencontre (DE) en T . La droite (TN) rencontre la droite (AB) en M . De la même façon on trace la droite (AE) qui rencontre (BC) en P , puis le parallélogramme $CPVE$ pour obtenir la droite passant par P et parallèle à (CE) cette droite rencontre (AC) en Q .

Démontrons que $AM = MN = NP = PQ = QA$.

Le théorème de Thalès appliqué aux triangles ABD et AMN fournit :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD} \quad (1)$$

dans les triangles ADE et ANP :

$$\frac{NP}{DE} = \frac{AN}{AD} = \frac{AP}{AE} \quad (2)$$

dans les triangles ACE et APQ :

$$\frac{AP}{AE} = \frac{PQ}{CE} = \frac{AQ}{AC} \quad (3)$$

finalement d'après (1), (2) et (3)

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} = \frac{NP}{DE} = \frac{PQ}{CE} = \frac{AQ}{AC}$$

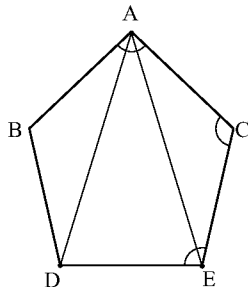
or $AB = BD = DE = EC = CA$

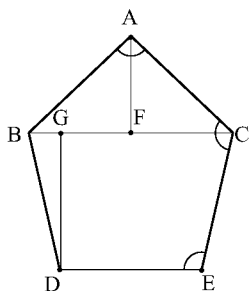
donc $AM = MN = NP = PQ = QA$

3° a) Supposons les angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{E}, \hat{C}$ égaux. la somme des angles d'un triangle valant 180° on peut considérer les trois triangles ABD, ADE, AEC , dont la somme des angles vaut $540^\circ = \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{C} = 5\hat{A}$.

$$\text{Donc } \hat{A} = \frac{540}{5} = 108^\circ = \beta,$$

$$\text{on pose donc } \alpha = \frac{108}{3} = 36^\circ.$$





Soit F la projection orthogonale de A sur $[BC]$ (F est le milieu de $[BC]$) dans le triangle rectangle ABF , on a donc $\widehat{BAF} = \frac{\beta}{2} = 54^\circ$
 donc $\widehat{ABF} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ = \alpha$. On en déduit que $\widehat{CBD} = \beta - 36^\circ = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$ donc si G est la projection orthogonale de D sur (AC) , en remarquant que $GF = \frac{DE}{2}$.

$$\cos(2\alpha) = \frac{BG}{BD} = \frac{BF - \frac{1}{2}DE}{BD} = \frac{BF}{AB} - \frac{1}{2} = \cos \alpha - \frac{1}{2}.$$

3° b) Supposons $\widehat{A} = 108^\circ$. La construction du 1° fournit

$$\cos(\widehat{CBD}) = \frac{BG}{BD} = \frac{BF - \frac{1}{2}DE}{BD} = \cos \alpha - \frac{1}{2} = \cos(2\alpha)$$

donc $\widehat{CBD} = 2\alpha$, et $\widehat{ABD} = 3\alpha = \beta$.

Par symétrie $\widehat{ACE} = \beta$, puis

$$\widehat{BDE} = \frac{540^\circ - 3\beta}{2} = \frac{540^\circ - 324^\circ}{2} = 108^\circ = \widehat{CED}$$

Donc le pentagone $ABDEC$ est régulier puisque les cinq angles sont égaux.

Exercice n° 2

Enoncé

La tête à l'envers

On rappelle qu'en écriture décimale, le nombre $A = 3\,457$ se « déchiffre » par l'égalité : $A = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7$.

Pour chaque entier $n > 0$ on note R_n le reste de la division euclidienne de 10^n par 7, c'est-à-dire l'unique entier R_n satisfaisant à $10^n = 7q + R_n$ et $0 \leq R_n < 7$, q étant un entier (qui dépend de n).

On a ainsi par exemple $R_1 = 3$, puisque $10 = 7 \times 1 + 3$.

1° Calculer R_n pour tous les entiers $n \leq 7$.

2° On indique que $R_{24} = 1$. En déduire simplement R_{25} puis R_{26} , R_{27} etc. jusqu'à R_{31} . Exprimer alors simplement la valeur de R_n pour toute valeur de n .

3° Soit a un entier et x l'entier $a \times 10^n$. Démontrer que le reste de la division de x par 7 est le même que celui de la division par 7 du nombre $a \times R_n$.

4° Déterminer les deux plus petites valeurs de n telles que le nombre entier $3 \times 10^{n-1}$ soit divisible par 7.

5° A tout nombre entier N on associe un nombre entier noté $f(N)$ de la manière suivante : à partir de l'écriture décimale de N on retire son premier chiffre à gauche et on le place à la fin de l'écriture obtenue.

Ainsi par exemple : $f(\mathbf{3547}) = 547\mathbf{3}$ ou encore : $f(10) = 01 = \mathbf{1}$.

On suppose que l'écriture décimale de N est $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_2 a_1 a_0$ (les entiers a_k sont les chiffres du nombre N qui comporte donc $n+1$ chiffres).

Il en résulte que $f(N)$ s'écrit $a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_2 a_1 a_0 \mathbf{a_n}$.

a) Montrer que N peut s'écrire $10^n a_n + B$ où B est un nombre entier dont on précisera l'écriture décimale, et que $f(N)$ s'écrit alors $10 \times B + a_n$.

b) En déduire les deux plus petits nombres entiers N tels que $f(N) = 3 \times N$.

Solution

1. $10^0 = 1 = 07 + 1, \quad R_0 = 1$
 $10^1 = 10 = 1 \times 7 + 3, \quad R_1 = 3$
 $10^2 = 100 = 14 \times 7 + 2, \quad R_2 = 2$
 $10^3 = 1000 = 142 \times 7 + 6, \quad R_3 = 6$
 $10^4 = 10000 = 1428 \times 7 + 4, \quad R_4 = 4$
 $10^5 = 100000 = 14285 \times 7 + 5, \quad R_5 = 5$
 $10^6 = 1000000 = 142857 \times 7 + 1, \quad R_6 = 1$
 $10^7 = 10000000 = 1428571 \times 7 + 3, \quad R_7 = 3$

2. Supposons que $R_{24} = 1$: $10^{24} = 7q + 1$, alors

$$10^{25} = 70q + 10 = 70q + 1 \times 7 + 3 = 7(10q + 1) + 3 = 7q' + 3$$

donc $R_{25} = 3$

de même

$$10^{26} = 700q' + 100 = 700q' + 14 \times 7 + 2 = 7(100q' + 14) + 2 = 7q'' + 2$$

donc $R_{26} = 2$

de même on peut écrire par exemple

$$10^{29} = 10510^{24} = 10^5(7q+1) = 10^5 \times 7q + 14285 \times 7 + 5 = 7(10^5 q + 14285) + 5$$

donc $R_{29} = 5$.

Ce raisonnement permet ainsi de montrer que :

$$R_{25} = 3, R_{26} = 2, R_{27} = 6, R_{28} = 4, R_{29} = 5, R_{30} = 1, R_{31} = 3.$$

On montre donc que si $R_p = 1$, alors la suite des 6 restes suivants est : $(3, 2, 6, 4, 5, 1)$

or $R_0 = 1$, $R_6 = 1$ donc $R_{12} = 1$, $R_{18} = 1$ et plus généralement $R_{6n} = 1$ donc pour tout entier naturel n , on a

$$R_{6n} = 1, R_{6n+1} = 3, R_{6n+2} = 2, R_{6n+3} = 6, R_{6n+4} = 4, R_{6n+5} = 5$$

3. $x = a10^n = a(7q + R_n) = 7aq + aR_n$.

Notons $aR_n = 7q_1 + r$: ainsi r est le reste dans la division de aR_n par 7.

On a alors :

$$x = 7aq + 7q_1 + r = 7(aq + q_1) + r$$

donc le reste dans la division de x par 7 est égal à r

4. le reste r' dans la division de $3 \cdot 10^n$ par 7 est donc le même que le reste dans la division de $3R_n$ par 7 : pour que $3 \cdot 10^n - 1$ soit divisible par 7 il faut que le reste r' soit égal à 1

$$\text{or } 3R_0 = 3 \rightarrow r' = 3 : 3R_1 = 9 \rightarrow r' = 2 : 3R_2 = 6 \rightarrow r' = 6 :$$

$$3R_3 = 18 \rightarrow r' = 4 : 3R_4 = 12 \rightarrow r' = 5 : 3R_5 = 15 \rightarrow r' = 1$$

$$3R_6 = 3R_0 = 3 \rightarrow r' = 3 :$$

on retrouve ainsi les valeurs obtenues précédemment le premier entier n tel que $3R_n$ admet pour reste 1 est donc $n = 5$. Le suivant est $n = 5 + 6 = 11$

5. (a) posons :

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

On a donc

$$N = a_n 10^n + (a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0) = a_n 10^n + B$$

$$B = a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

d'où par définition

$$\begin{aligned} f(N) &= a_{n-1} 10^n + \cdots + a_1 100 + a_0 10 + a_n \\ &= 10(a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0) + a_n \\ &= 10B + a_n \end{aligned}$$

(b) $f(N) = 3N$ ssi $10B + a_n = 3(a_n 10^n + B)$ ssi $a_n(3 \cdot 10^n - 1) = 7B$

donc le produit $a_n(3 \cdot 10^n - 1)$ doit être divisible par 7.

7 est un nombre premier et $1 \leq a_n \leq 6$.

Donc $3 \cdot 10^n - 1$ doit être divisible par 7.

Les deux plus petites valeurs de n possibles sont donc $n = 5$ et $n = 11$ on cherche un entier N avec le moins de chiffres possibles donc commençons par $n = 5$. Si $n = 5$; $a_5(3 \cdot 10^5 - 1) = 7B$.

$$3 \cdot 10^5 - 1 = 7 \times 42857 \text{ donc } a_5 \times 7 \times 42857 = 7B \text{ ssi } B = a_5 \times 42857$$

pour $a_5 = 1, B = 42857$

pour $a_5 = 2, B = 85714$

au-delà la valeur de B ne convient plus puisque B possèdera plus de 5 chiffres. Nous avons exactement deux solutions à 6 chiffres : $N_1 = 142857$ et $N_2 = 285714$.

Vérification : $f(N_1) = 428571 = 3 \times 142857$ et $f(N_2) = 857142 = 3 \times 285714$