

NICE

Exercice n° 1

Enoncé

Ce que fait la différence

(Toutes sections)

1. On considère les nombres naturels à deux chiffres (de 10 à 99). Soit n un de ces nombres. Il s'écrit $\overline{ab}$ (a est le chiffre des dizaines et b est celui des unités); On inverse l'ordre des chiffres et en considérant l'écriture $\overline{ba}$, on obtient ainsi un nouveau nombre P . On effectue la différence de ces deux nombres (le plus grand moins le plus petit). Par exemples :

si $n = 23$ alors $p = 32$ le résultat cherché est $32 - 23 = 9$

si $n = 60$ alors $p = 06 = 6$, le résultat cherché est $60 - 6 = 54$.

Combien de résultats différents obtient-on ?

2. On répète la même opération avec les nombres à trois chiffres. Combien de résultats différents obtient-on ?

3. On répète cette même opération avec les nombres à quatre chiffres. Combien de résultats différents obtient-on ?

4. On répète cette même opération avec les nombres à cinq chiffres. Combien de résultats différents obtient-on ?

Pourriez vous donner une généralisation de ce que vous avez pu observer ?

Solution

1) Effectuer la différence entre le plus grand et le plus petit de deux nombres revient à calculer la valeur absolue de leur différence.

On a $|10(a + b) - (10b + a)| = 9|a - b|$ où $|a - b|$ peut prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ..., 9.

2) $|10a + 10b + c - (100c + 10b + a)| = 99|a - c|$ où $|a - c|$ peut prendre l'une des dix valeurs ci-dessus.

3) $|1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a)| = |999(a - d) + 90(b - c)|$.

Si $a = d$, $90|b - c|$ prend dix valeurs.

Si $a \neq d$, on a $|999(a - d)| \geq 999 > 810 \geq |90(b - c)|$.

$|999(a - d) + 90(b - c)|$ est donc de la forme $999k + 90\ell$ avec $k = 1, 2, \dots, 9$ et $\ell = -9, -8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9$.

Ces nombres sont bien strictement positifs, distincts et distincts des dix nombres déjà trouvés.

En effet, si $999k + 90\ell = 999k' + 90\ell'$, on a $111(k - k') = 10(\ell' - \ell)$ et $k - k'$ ne peut être multiple de 10 que si $k = k'$ et alors $\ell = \ell'$.

En partant des nombres de quatre chiffres, on obtient donc $10 + 9 \times 19 = 181$ résultats différents.

4) $|10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e - (10\,000e + 1000d + 100c + 10b + a)| = |9\,999(a - e) + 990(b - d)|$ prend lui aussi 181 valeurs distinctes.

Généralisation :

Soit $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ un nombre de n chiffres ($n \geq 2$).

Si n est impair, $n = 2p + 1$, on obtient le même nombre de résultats distincts qu'à partir d'un nombre de $2p$ chiffres $\overline{a_1 a_2 \dots a_{2p-1} \dots a_{2p}}$.

On a :

$9 \times 19^{p-1}$ résultats distincts tels que $a_1 \neq a_{2p}$,

$9 \times 19^{p-j-1}$ résultats distincts tels que $a_i = a_{2p} \dots a_j = a_{2p-j+1}$, $a_{j+1} \neq a_{2p-j}$

où $1 \leq j \leq p - 2$,

10 résultats distincts tels que $a_i = a_{2p}, \dots, a_{p-1} = a_{p+2}$.

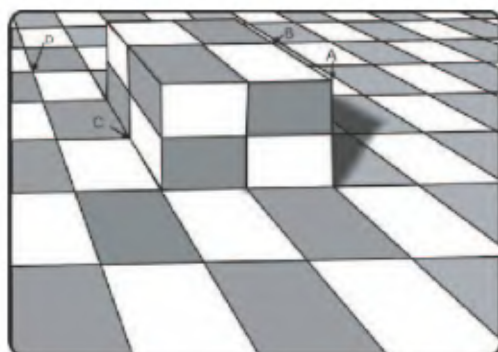
$$\begin{aligned} \text{Soit, en tout } 9 \times 19^{p-1} + 9 \sum_{j=1}^{p-2} 10^{p-j-1} + 10 &= 1 + 9 \sum_{j=0}^{p-1} 19^{p-j-1} \\ &= 1 + 9 \frac{19^p - 1}{19 - 1} \\ &= 1 + \frac{19^p - 1}{2} = \frac{19^p + 1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice n° 2

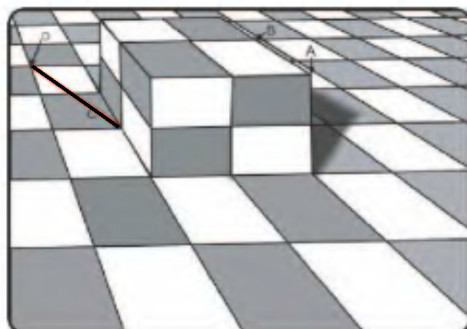
Énoncé

Un escargot se déplace...

(Section S)



Le dessin ci-dessus représente un cube posé sur un plan. Toutes les surfaces grises et blanches sont des carrés identiques dont le côté est l'unité 1. Les points A et B sont situés au dessus du cube, les points C et D sont dans le plan. Ces quatre points sont tous des sommets de carrés. Un escargot se déplace sur les surfaces de ce petit monde virtuel. Il cherche à minimiser les distances à parcourir. Il s'agit donc pour lui (et pour vous) de déterminer le plus court chemin pour aller d'un point à un autre de ce petit monde et d'en calculer sa longueur. Par exemple le plus court chemin entre D et C est représenté sur le dessin ci-dessous

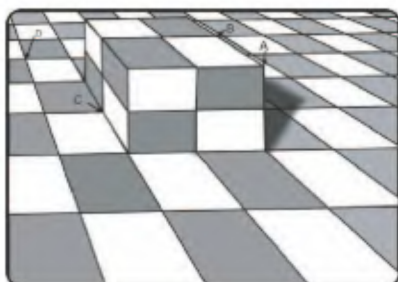


1. Calculez-en la longueur.
2. On s'intéresse au plus court chemin entre les points C et B. Donner la longueur de ce chemin. Dessiner en rouge sur le premier dessin de l'annexe le chemin de l'escargot.
3. Quel est le plus court chemin entre les points C et A ? Donner la longueur de ce chemin. Dessiner en rouge sur le second dessin de l'annexe le chemin de l'escargot.
4. Quel est le plus court chemin entre les points D et A ? Donner la longueur de ce chemin. Dessiner en rouge sur le troisième dessin de l'annexe le chemin de l'escargot.

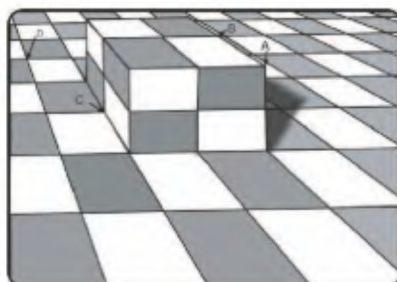
5. Quel est le plus court chemin entre les points D et B ? Donner la longueur de ce chemin. Dessiner en rouge sur le quatrième dessin de l'annexe le chemin de l'escargot.

ANNEXE

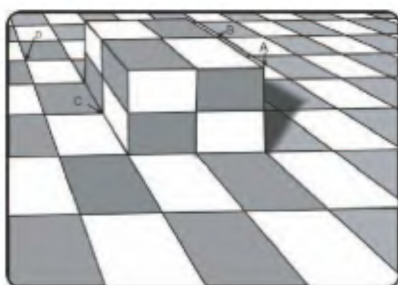
Cette annexe était à rendre avec la copie.



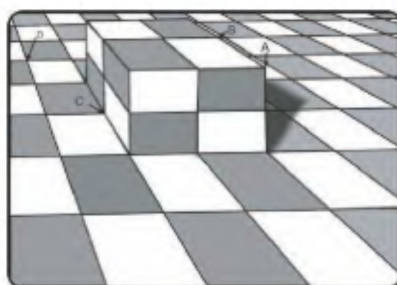
premier dessin



deuxième dessin



troisième dessin



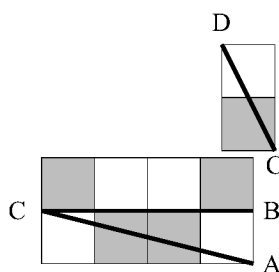
quatrième dessin

Solution (Paul-Louis Hennequin)

1. Par Pythagore : $DC^2 = 4 + 1 = 5$, $DC = \sqrt{5}$.

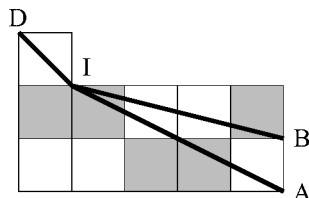
2. Un patron des deux faces gauche et supérieure du cube montre que le chemin le plus court de C à B est le segment $[CB]$ sur le patron. $CB = 4$.

3. Sur le même patron, le chemin de C à A le plus court est le segment $[CA]$ de longueur $\sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$.



4. Pour aller de D à A , on peut passer par la face gauche et utiliser le patron ci-contre.

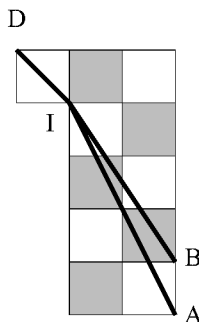
Le chemin DIA a alors pour longueur $DI + IA = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$.



Soit par la face arrière et utiliser le deuxième patron ci-contre.

Le nouveau trajet DIA a alors pour longueur $DI + IA = \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$.

On a donc dans ce cas deux trajets de longueur minimum.



5. De même, de D en B le trajet le plus court par la face gauche a pour longueur $DI + IB = \sqrt{2} + \sqrt{17}$ et le plus court par la face arrière $\sqrt{2} + \sqrt{13}$. C'est donc ce dernier qui est de longueur minimum.

Remarque : Pour justifier que les trajets les plus courts passent par I , notons J le point où l'escargot atteint le cube. On a $DJA > DIA$ et $DJB > DIB$ pour tout point I distinct de J .

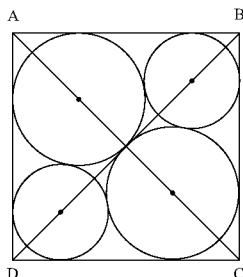
Exercice n° 3

Enoncé

Cercles dans un carré

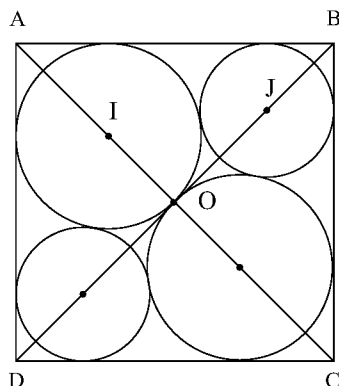
(Section ES)

On construit dans un carré de côté 1, quatre cercles comme l'indique la figure ci-dessous : Calculer les rayons de ces cercles.



Solution 1 (Paul-Louis Hennequin)

Appelons I le centre du grand cercle supérieur et R son rayon, J celui du petit cercle supérieur de rayon r et O le centre du carré $ABCD$.



$$\text{On a : } OI = R \text{ et } AI = R\sqrt{2}, \quad OA = OI + AI = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d'où : } R(1 + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ou } R(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ où } R = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{On a aussi : } OJ = OB - BJ = \frac{\sqrt{2}}{2} - r\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad OJ^2 &= IJ^2 - OI^2 \\ &= (R + r)^2 - R^2 = 2rR + r^2 \end{aligned}$$

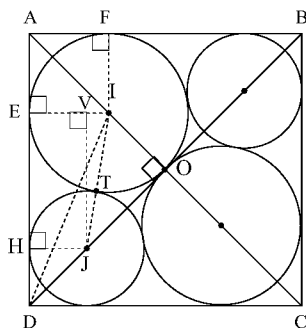
$$r \text{ est donc solution de l'équation } \frac{1}{2} - 2r + 2r^2 = 2rR + r^2$$

$$\text{ou } \frac{1}{2} - 2r(1 + R) + r^2 = 0$$

$$\text{ou } \frac{1}{2} - r(4 - \sqrt{2}) + r^2 = 0.$$

Comme $r \leq \frac{1}{2} < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, seule convient la plus petite racine :

$$r = \frac{4 - \sqrt{2} - \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2 - 2}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

Solution 2 (Henri Bareil)

1. Comme $IO = IE$, I est sur la bissectrice de $\widehat{AOD}$ et, par symétrie, $DE = DO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or $AEIF$ est un carré de côté R . Donc $R = AE = AD - DE = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. En utilisant le triangle rectangle JOI :

$$OJ = \frac{\sqrt{2}}{2} - DJ = \frac{\sqrt{2}}{2} - r\sqrt{2} ; OI = R ; IJ = R + r$$

La relation de Pythagore donne $IJ^2 = OI^2 + OJ^2$ soit, après calculs :

$$r^2 - 2r \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2} = 0.$$

$\Delta' = 4 - 2\sqrt{2}$. D'où $r = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ mais, avec $+$ devant le radical,

$r > 1$. Ce cas est donc à exclure. Il reste $r - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

On aurait pu utiliser aussi le triangle rectangle IJV où

$$IJ = R + r$$

$$IV = R - r$$

$$JV = EH = 1 - R - r$$

$$= 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - r$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - r$$

La relation de Pythagore conduit à la même équation du second degré que la méthode précédente.

Remarque :

Nos calculs ne laissent subsister que la possibilité d'une valeur pour r .

Comme la figure existe bien, cette possibilité donne bien une solution, la solution.