

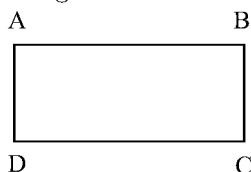
# NANCY-METZ

## Exercice n° 1

### Enoncé

#### Tables et nappes<sup>1</sup>

1. Quelle est la longueur maximale du côté d'une table carrée que l'on puisse recouvrir entièrement par une nappe ronde de 1 mètre de diamètre ?
2. On considère une table rectangulaire  $ABCD$  telle que  $AD = 0,5$  mètre.



Pour répondre aux questions suivantes on pourra utiliser les milieux de  $[AB]$  et  $[CD]$ .

- a) Montrer que si  $AB = \sqrt{3}$  mètre, alors on peut recouvrir la table avec deux nappes rondes de 1 mètre de diamètre.
  - b) Montrer que si  $AB > \sqrt{3}$  mètre, alors il n'est pas possible de recouvrir la table avec les deux nappes.
3. Quelle est la longueur maximale du côté d'une table carrée que l'on puisse recouvrir entièrement par deux nappes rondes de 1 mètre de diamètre ?

### Solution

Remarquons que la distance de deux points d'un disque de diamètre 1 est inférieure ou égale à 1.

1. Soit  $a$  le côté de carré. La longueur de la diagonale est  $a\sqrt{2}$ .

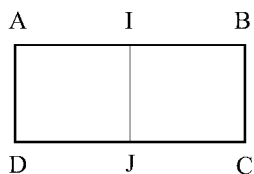
Si  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il suffit de centrer la nappe au milieu du carré.

---

<sup>1</sup>Cf. le problème « les Nappes » posé au Rallye d'Auvergne. (PanoraMath3, p. 107)

Si  $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la longueur de la diagonale est supérieure à 1 et la nappe ne peut pas recouvrir à la fois deux sommets opposés.

2.



Appelons  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $J$  le milieu de  $[CD]$ .

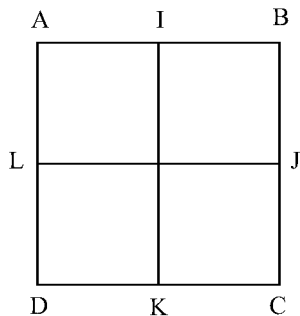
a) Si  $AB = \sqrt{3}$ ;  $ID = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ . En centrant les nappes aux centres des carrés  $AIJD$  et  $IB CJ$ , la table est entièrement recouverte.

b) Notons  $\ell$  la longueur de la table.

Si  $\ell > \sqrt{3}$ , alors  $ID > 1$ ,  $BD > \sqrt{\frac{1}{4} + 3} > 1$  et  $CD > \sqrt{3} > 1$ .

Si une nappe recouvre  $D$ , elle ne peut pas recouvrir les points  $I$ ,  $B$ ,  $C$ .  
L'autre nappe ne peut pas recouvrir ces trois points car  $IC > 1$ .

3.  $ABCD$  est une table carrée de côté  $a$ . Notons  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$  les milieux respectifs des côtés  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ .



$$ID^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Si  $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $ID = 1$ . En centrant les nappes aux centres des rectangles  $AIKD$  et  $IBCK$ , la table est entièrement recouverte.

Si  $a > \frac{2}{\sqrt{5}}$ , on a  $AJ > 1$ ,  $AC > 1$ ,  $AK > 1$  et  $BD > 1$ . Une nappe ne peut pas recouvrir à la fois  $B$  et  $D$ .

Supposons qu'une nappe recouvre  $A$  et  $B$ . Elle ne peut recouvrir ni  $C$  ni  $J$  ni  $K$  ni  $D$ .

Or,  $JD > 1$ . Donc la deuxième nappe ne peut pas recouvrir  $J$  et  $D$ .

La longueur maximale cherchée est  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

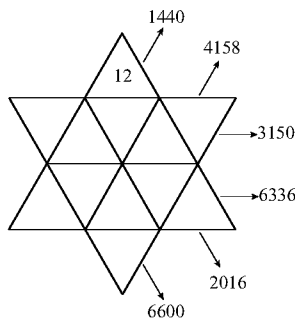
## Exercice n° 2

### Enoncé

#### L'Etoile

Les nombres entiers de **1** à **12** doivent être placés dans les douze cases de l'étoile ci-dessous. La position du nombre **12** est donnée.

Les nombres écrits à l'extérieur de l'étoile sont **les produits** des nombres placés dans les cinq cases de l'étoile situées dans la direction de la flèche.



- 1) Quelle est la seule case qui peut contenir le nombre **7** ? Justifier la réponse.
- 2) Quelles sont les cases possibles pour les nombres **5** et **10** ? Justifier la réponse.
- 3) Placer les nombres **1** et **9**. Justifier la réponse.
- 4) Placer, sans justification, les autres nombres et reproduire l'étoile complétée sur la copie.

## Solution (Paul-Louis Hennequin)

### •Préliminaires

a) Nommons les 11 cases vides de  $a$  à  $k$  suivant la figure.

b) Décomposons en facteurs premiers les produits :

$$1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$$

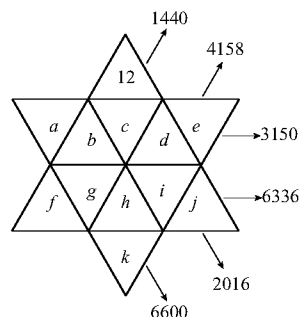
$$4158 = 2 \times 3^3 \times 7 \times 11$$

$$3150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

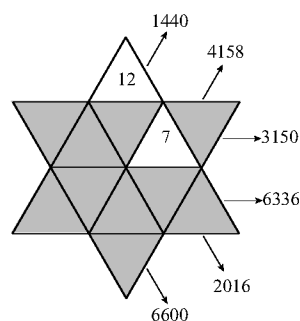
$$6336 = 2^6 \times 3^2 \times 11$$

$$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$$

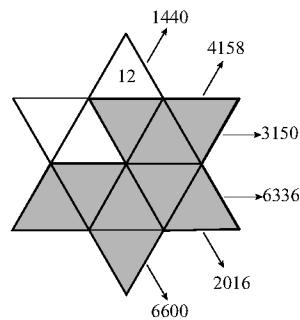
$$6000 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 11.$$



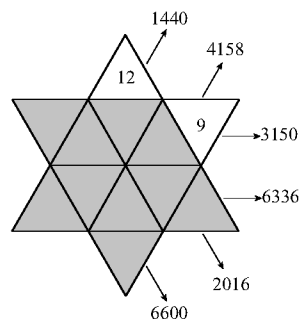
•1) 1440, 6336 et 6000 ne sont pas divisibles par 7 mais 2016 l'est. La seule case qui peut contenir 7 est  $d$ .



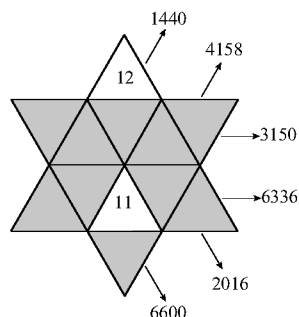
•2) 4158, 6336 et 2016 ne sont pas divisibles par 5 ; 5 et 10 ne peuvent donc être placés qu'en  $a$  et  $b$  ou  $b$  et  $a$ .



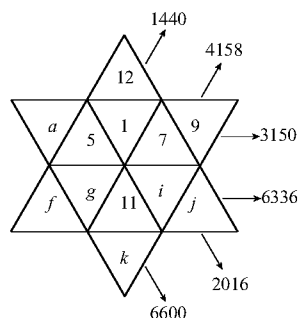
•3) 6600 n'est pas divisible par 9, 1440 et 2016 ne sont pas divisibles par 27 et 12 est divisible par 3. Cela laisse  $e$  comme seule case possible pour 9 et 1 doit être placé en  $c$ .



•4) 1440, 3150 et 2016 ne sont pas divisibles par 11, mais 6336 l'est. 11 doit donc être placé en  $h$ .



•5) Nous sommes donc arrivés à l'étape ci-contre en notant  $\ell$  le contenu de la case  $\ell$ .



$$(a)(b) = 50$$

$$(k)(i) = \frac{4158}{7.9.11} = 6$$

$$(k)(g) = \frac{6600}{5.10.11} = 12$$

$$(i)(j) = \frac{2016}{7.12} = 24$$

$$(f)(g) = \frac{6336}{11.24} = 24$$

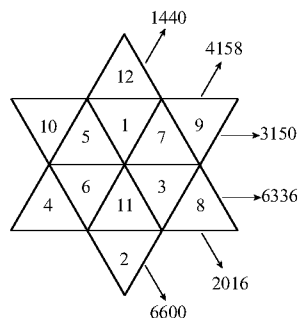
$$(b)(f)(g) = \frac{1440}{12} = 120$$

d'où  $(b) = 5$  et  $(a) = 10$ .

$(k)(i)(j) = 6(j) = 24(k)$  d'où  $(j) = 4(k)$  et comme  $2 \leq (k)$  et  $(j) \leq 8$ ,  $(k) = 2$  et  $(j) = 8$ .

$(k)(f)(g) = 12(f) = 24(k)$  d'où  $(f) = 2(k) = 4$ ,  $(g) = 6(i) = 3$ .

On vérifie que la solution ci-contre convient et la suite des étapes établit l'unicité.



## Solution (Henri Bareil)

### ① PLACER 7

Comme 7 est premier, il faut et il suffit qu'il appartienne à toute travée dont le produit est divisible par 7. (Il n'en irait pas ainsi, comme condition nécessaire, pour un nombre non premier : 8, par exemple, peut très bien ne pas figurer dans une travée dont le produit est divisible par 8. Cette divisibilité peut s'effectuer autrement qu'avec 8 grâce à la présence, par exemple, de 12 et de 2, de 4 et de 2, de 10 et de 4, etc.). Des décompositions bien choisies - ainsi  $1440 = 1400 + 40$ ;  $4158 = 4200 - 42$ ; etc., permettent de répondre aisément en calcul mental à la divisibilité par 7.

Il émerge trois produits divisibles par 7. Ce sont 4158; 3150; 2016.

7 est à l'intersection des trois travées correspondantes.

### Remarque :

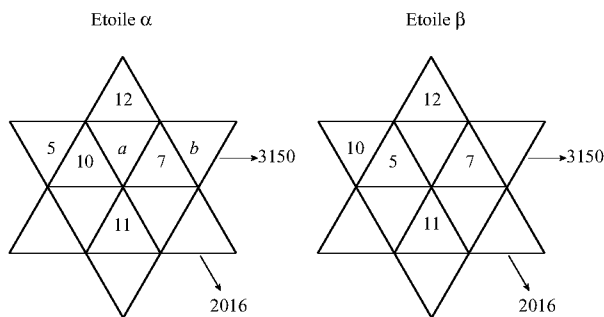
La même méthode permet de placer 11, lui aussi premier, qui occupera la case intersection de trois travées possibles : celles de 4158; 6336; 6600.

Elle ne permet pas de placer le nombre premier 3. Une travée peut avoir son produit divisible par 3 sans que 3 y figure, pourvu qu'y figurent 6 ou 9 ou 12.

Quant à 5, Cf. ci-dessous.

### ② PLACER 5 ET 10

Sans calcullette (!), il apparaît immédiatement que trois produits sont divisibles par 5 et 10. Deux sont même divisibles par  $5 \times 10$ , l'autre pas. D'où deux possibilités, au moins pour l'instant.



### ③ PLACER 1 et 9

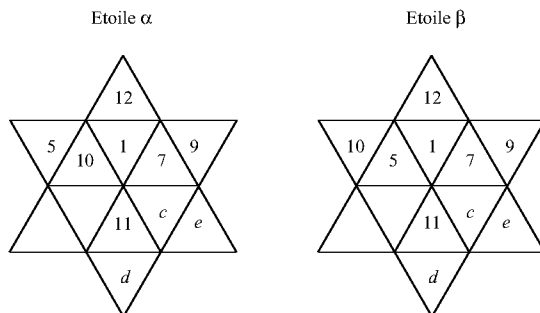
La tyravée la plus sympa est celle qui a trois cases garnies. Soit  $a$  et  $b$  les deux autres nombres.

$5 \times 10 \times 7 \times a \times b = 3150$  soit  $350ab = 3150$  et  $ab = 9$ . Or  $a \neq b$ . D'où  $a = 1$  et  $b = 9$  ou  $a = 9$  et  $b = 1$ .

Comme  $a$  figure dans la travée de produit 2016,  $a$  doit diviser 2016 : 84 soit 24. Ceci exclut 9.

Donc  $a = 1$  et  $b = 9$ .

④ Dès lors :



Considérons les cases  $c, d, e$  pour lesquelles il semble que nous ayons le maximum de renseignements.

En utilisant les produits correspondants :

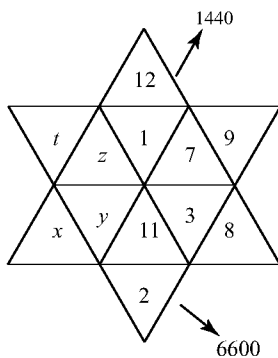
$ce = 24$       Le nombre 12 étant déjà utilisé, il reste la possibilité  $cd = 6$       d'où  
 $c = 3$  et  $e = 8$  (ou « à l'envers ») et  $c = 4$  et  $e = 6$   
 (ou à l'envers).

$c = 2$  et  $d = 3$ , ou à l'envers.

Les deux conditions simultanées obligent à  $c = 3$ .

D'où  $d = 2$  et  $e = 8$ .

Dès lors, nous sommes sûrs de l'étoile ci-dessous :



avec un flottement entre les étoiles  $\alpha$  et  $\beta$  pour 5 et 10. Mais dans les deux cas,

$y = 600 : (50 \times 11 \times 2)$

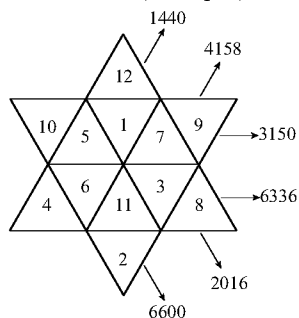
$y = 6$ .

Donc  $xz = 1440 : (12 \times 6)$   
 $= 20$

puis  $x = 2$  et  $z = 10$  ou  $x = 4$  et  $z = 5$ .

Le cas  $x = 2$  est exclu, 2 étant déjà attribué.

Cela oblige au choix  $\beta$  et à la solution, unique, ci-dessous.



## Palmarès

### Série S

*Premier prix* : RAUCY Loïc - Lycée Fabert - METZ

*Deuxième prix* : JUAN Paul-Edouard - Lycée Georges de la Tour - METZ

*Troisième prix* : ROLIN Pierre - Lycée Fabert - METZ

WURTZ Damien - Lycée Louis Vincent - METZ.

### Séries L - SE

*Premier prix* : NEYHOUSER Simon - Lycée Fabert - METZ

### Séries STL-STI

*Premier prix* : BRANLY Edouard - Lycée Varoquaux - TOMBLAINE.