

MONTPELLIER

Dans cette compétition, l'inventivité et la créativité sont récompensées au même titre que l'utilisation de techniques mathématiques éprouvées.

Exercice n° 1

Énoncé

Saine lecture

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à 999.

Quel est le nombre total de chiffres écrits pour la pagination ?

Combien de fois le chiffre 7 a-t-il été utilisé ? Et le chiffre 0 ?

Solution

Le nombre total de chiffres utilisés est $9 + 2 \times 90 + 3 \times 900$ soit 2 889.

Pour compter le nombre de 7 il faut compter par exemple le nombre de fois où il est écrit comme chiffre des unités, le nombre de fois où il est écrit comme chiffre des dizaines puis le nombre de fois où il est écrit comme chiffre des centaines.

- Pour les unités on va de 007 à 997 soit **100** occurrences.
- Pour les dizaines on va de 070 à 079 puis de 170 à 179 jusqu'à 970 à 979 soit $10 \times 10 =$ **100** occurrences.
- Pour les centaines de 700 à 799 soit **100** occurrences.

Ce qui fait 300 utilisations du chiffre 7.

Pour l'utilisation du zéro, on peut remarquer qu'il est utilisé 99 fois en unité et 90 fois en dizaines, jamais en centaines soit **189** occurrences.

On peut vérifier, en remarquant que les autres chiffres jouent le même rôle, que $9 \times 300 + 189 = 2889$.

Ce qui ne prouve pas que les résultats sont justes mais au moins qu'ils sont cohérents.

N.D.L.R. Bravo pour la mise en valeur du rôle de la « vérification » !

Exercice n° 2

Enoncé

« Struggle for life »

Sur cette île chaque jour et dans cet ordre, chaque loup tue un mouton, chaque mouton tue un serpent et chaque serpent tue un loup. Après dix jours il ne reste plus sur l'île qu'un mouton et aucun autre animal combien y avait-il d'animaux de chaque espèce au départ ?

Solution 1

Désignons par L_n , S_n et M_n le nombre de loups, de serpents et de moutons le $n^{\text{ième}}$ jour et situons-les par rapport au jour précédent.

$$\text{On a } \begin{cases} M_n = M_{n-1} - L_{n-1} \\ S_n = S_{n-1} - M_n \\ L_n = L_{n-1} - S_n \end{cases} \quad \text{d'où } \begin{cases} L_n = M_{n-1} - S_{n-1} \\ M_n = M_{n-1} - L_{n-1} \\ S_n = S_{n-1} - M_{n-1} + L_{n-1}. \end{cases}$$

Résolvons ce système pour obtenir les nombres d'un jour $n - 1$ en fonction de ceux d'un jour n , ce qui permettra, de proche en proche, de remonter le temps...

$$S_{n-1} = M_n + S_n$$

$$L_{n-1} = L_n + S_n$$

$$M_{n-1} = M_n + L_n + S_n$$

Ce qui permet de faire un tableau :

jour	moutons	loups	serpents
10	1	0	0
9	1	0	1
8	2	1	2
7	5	3	4
6	12	7	9
5	28	16	21
4	65	37	49
3	151	86	114
2	351	200	265
1	816	465	616

Solution 2 (A. Guillemot)

Approche calculatrice.

Désignons par L_n , S_n et M_n le nombre de loups, de serpents et de moutons le $n^{\text{ième}}$ jour.

On a :

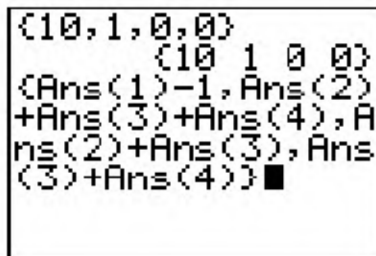
$$\begin{aligned}
 M_n &= M_{n-1} - L_{n-1} \\
 S_n &= S_{n-1} - M_n = S_{n-1} - M_{n-1} + L_{n-1} \\
 L_n &= L_{n-1} - S_n = M_{n-1} - S_{n-1}
 \end{aligned}$$

A partir de ces relations, on obtient :

$$\begin{aligned}
 M_{n-1} &= M_n + S_n + L_n \\
 S_{n-1} &= M_n + S_n \\
 L_{n-1} &= S_n + L_n
 \end{aligned}$$

Au dixième jour il reste 1 mouton, 0 serpent et 0 loup.

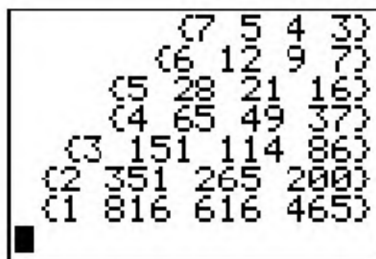
Entrons la liste des quatre nombres $\{10,1,0,0\}$ dans la calculatrice puis les quatre relations de récurrence.



```

(10,1,0,0)
  (10 1 0 0)
(Ans(1)-1,Ans(2)
+Ans(3)+Ans(4),A
ns(2)+Ans(3),Ans
(3)+Ans(4))■
  
```

Il suffit d'appuyer 9 fois sur la touche ENTER pour voir apparaître le résultat.



```

      (7 5 4 3)
    (6 12 9 7)
  (5 28 21 16)
 (4 65 49 37)
(3 151 114 86)
(2 351 265 200)
(1 816 616 465)
■
  
```

Donc on peut conclure qu'au départ il y avait 816 moutons, 616 serpents et 465 loups.

Avec le calcul matriciel.

Partons des relations précédentes :

$$\begin{aligned}
 M_n &= M_{n-1} - L_{n-1} \\
 S_n &= -M_{n-1} + S_{n-1} + L_{n-1} \\
 L_n &= M_{n-1} - S_{n-1}
 \end{aligned}$$

Appelons B_n la matrice : $\begin{pmatrix} M_n \\ S_n \\ L_n \end{pmatrix}$ et A la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Nous avons donc la relation $B_n = A \times B_{n-1}$.

On en déduit que $B_{n-1} = A^{-1} \times B_n$ et donc que $B_1 = (A^{-1})^9 \times B_{10}$ avec

$$B_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entrons les matrices A et B_{10} dans la calculatrice.



Et pour avoir le résultat, il suffit de demander $(A^{-1})^9 \times B$.



Donc on peut conclure qu'au départ il y avait 816 moutons, 616 serpents et 465 loups.

Palmarès

Premier prix : MARTIN Nicolas - Lycée Arago - PERPIGNAN

Deuxième prix : FARRAN Benjamin - Lycée Chaptal - MENDE

Accessit : AKBARALY David - Lycée Mermoz - MONTPELLIER

CAZOLA Julien - Lycée La Merci - MONTPELLIER

BROUZET Christophe - Lycée Daudet - NIMES

FLAGOTHIER Nicolas - Lycée Joffre - MONTPELLIER.